CORSO ELEMENTARE

DI

MATEMATICHE PURE.

TOMO I.

CORSO ELEMENTARE

DI

MATEMATICHE PURE

AD USO

DELLE SCUOLE PIE.

TOMO I.

ARITMETICA, ALGEBRA E GEOMETRIA.

SECONDA EDIZIONE.

FIRENZE
DALLA TIPOGRAFIA CALASANZIANA
1862

AVVERTENZA.

Impegnati a prestare l' opera nostra per una nuova edizione del corso elementare di Matematiche pure ad uso delle Scuole Pie, già compilato dall' illustre P. Inghirami di chiara memoria, comprendemmo immediatamente che le mutate condizioni e le esigenze dei tempi, i progressi della scienza e i principj rigorosi di una sana critica, c' imponevano di metter le mani su quel lavoro per ritoccarlo e modificarlo opportunamente; tanto almeno quanto le angustie del tempo, di cui potevamo disporre per questo scopo, ce lo avessero permesso.

Costituiti in questa necessità, ci parve indispensabile per prima cosa l' abolizione dei due caratteri, che distinguevano l' ordine di studio delle materie; e molto più naturale e conveniente ci sembrò la distribuzione di queste in tre parti successive e connesse, le quali avrebbero potuto offrire ai giovani più che sufficiente argomento di studio per tre successivi anni accademici. Nella prima parte abbiamo quindi raccolto l' Aritmetica, l' Algebra e la Geometria elementare: abbiamo assegnato la seconda all' Algebra e alla Geometria superiore, e riserbammo la terza pel Calcolo differenziale e integrale.

In secondo luogo, considerando che leggi speciali sulla istruzione pubblica e usanze ormai generali esigono la Geometria di Legendre per l' insegnamento elementare di questa scienza, si è riputato utile e conveniente l' adottare quel trattato nel nostro

corso; perciocchè non solo si dispensa il giovane studioso dal provvedere due libri, ma gli si porge eziandio una bella educazione sul modo di esporre e di dimostrare con ordine, con chiarezza e con precisione la verità, una volta che sia conosciuta. E poichè la Geometria superiore presenta largo campo ed esteso esercizio all'applicazione dell'Algebra alla Geometria, lungi dal nuocere agli alunni col nostro divisamento, rendiamo anzi più completa la loro istruzione, iniziandoli alla conoscenza dei metodi e moderni ed antichi per esporre le dottrine matematiche relative all'idea dello spazio. Avvertiremo però, che la seconda maniera adottata dal chiarissimo Geometra prenominato per istabilire la teoria delle parallele, non sembrandoci nè più semplice nè più agevole nè più rigorosa della prima, ci siamo attenuti a questa riproducendola fedelmente come comparve nelle prime edizioni di quel suo libro, divenuto ormai, si può dire, popolare.

In terzo luogo ci siamo indotti a rifondere affatto il Calcolo differenziale e integrale, proponendoci di trattarlo con nuovo metodo e col Principio infinitesimale: nel che siam certi di mandare ad effetto una ultima volontà, un forte desiderio del P. Inghirami, il quale e prediligeva il sistema degl'infinitesimi, e più volte negli ultimi tempi di sua gloriosa magistrale carriera confessava il bisogno di una rifusione in quella parte dell'opera sua, che riguardava il calcolo sublime, e si proponeva di effettuarla quando lo stato di sua salute glie lo avesse concesso alla circostanza di una nuova edizione. Non ci tratterremo a dir qui le ragioni che ci hanno spinto a richiamare in vigore la dottrina infinitesimale e a darle preferenza su quella, che oggi predomina nelle scuole, perchè lo abbiamo fatto in una estesa Memoria già pubblicata: la quale avendo riportato l'approvazione di molti giudici competenti, mentre da altri dotti matematici si è fin qui serbato un rigoroso silenzio sopra argomento di sì grande importanza, ci ha bastantemente animati alla determinazione ora espressa.

Finalmente, avvertendo che i paragrafi notati con asterisco

sono di nuova composizione, assicuriamo esserci dati premura di ampliare notevolmente l'Aritmetica: di rendere più generali e più rigorose alcune dimostrazioni e alcune teorie; d'introdurre nel nostro corso quelle interessanti scoperte, che sono compatibili colla sua natura di corso elementare; di stabilire dei saldi principj e dei sani criterj sull'uso dello *zero* e dei radicali *immaginarj*, non che sulla estensione delle formule, o sulla generalità degli algebrici risultamenti, eliminando quindi ciò che di sofistico erasi introdotto nella scienza nostra; ed abbiamo procurato, specialmente nella seconda e terza parte, e quindi allorchè i giovani allievi si sono alquanto abituati al calcolo e resi familiari i concetti matematici, che non mancassero quelle vedute, quelle riflessioni, quei nessi, quei logici procedimenti, che possono togliere alla scienza del calcolo l'idea di essere nulla più che un aggregato di parti poste accanto alla meglio, e darle invece quel collegamento, quella fluidità, quella forza che la rende una e viva, e che la mostra, quale è in verità, la più bella produzione scentifica puramente ideale dello spirito umano, per cui questo si manifesta immagine stupenda del Creatore suo Tipo.

Il libro pertanto che da noi si offre agli studiosi, speriamo che valga ad educarne saviamente e virilmente l'intelletto, a porli in grado di leggere con profitto le opere classiche di matematiche applicate, e ad introdurli a più vasti ed elevati studj di matematica pura: lo che se ci è dato conseguire, ci sarà pur concesso il conforto di credere non essere stati inutili, nella nostra delicata professione, alla gioventù in genere, e in specie a quella del nostro Paese.

Giovanni Antonelli
Eugenio Barsanti
delle Scuole Pie.

CORSO ELEMENTARE

DI

MATEMATICHE PURE.

NOZIONI PRELIMINARI.

La Matematica è la scienza che ha per oggetto d'investigare i rapporti fra le idee di quantità.

L'idea di quantità, o la *quantità*, come si dice comunemente per maggior semplicità di discorso, è un idea la quale si riferisce alla capacità di ricever misura, di che le cose ci appariscono fornite. Così il tempo, lo spazio, il moto, il suono, la luce, ec. si comprendono come cose capaci d'essere in qualche modo misurate.

L'idea di misurazione, oltre quella della cosa misurata, include anche l'altra di un termine di confronto, con cui si effettua o si valuta la misura. Questo termine si chiama *unità di misura*, o semplicemente *unità*, e la ripetizione o il riporto dell'unità, per eseguire la misurazione, costituisce il *numero*.

La scienza che ha per oggetto di trovare i rapporti fra i numeri, considerati in astratto come semplici e determinate aggregazioni di unità, è una parte della Matematica, e si appella *Aritmetica*.

Se i numeri si considerano come aggregazioni indeterminate di unità, in guisa che un simbolo o *segno* relativo ad esse possa rappresentare un numero determinato qualunque, allora la scienza, che alle relazioni di tali aggregati generali si riferisce, prende il nome di *Algebra*, la quale è dunque un'altra parte della Matematica.

Qualora lo studio dei rapporti fra i numeri tanto determinati, quanto indeterminati, si faccia non per modo di completa astrazione, ma rispetto alle idee desunte da quella di *spazio*, come sono le idee di estensione in lunghezza, in larghezza e in profondità o in altezza, in tal caso la parte di Matematica, che viene a formarsi, dicesi *Geometria*.

Al complesso di queste tre parti e delle altre, che scaturiscono dalle loro combinazioni e dai particolari sviluppi di ciascuna di esse, si dà oggi il nome di *Matematiche pure*, per distinguerle dalle altre scienze, nelle quali, oltre la Matematica, ricorre lo studio delle proprietà della cosa speciale relativa ad

ognuna, come sarebbero la *Meccanica* per le leggi del moto, l'*Acustica* per quelle del suono, l'*Ottica* per quelle della luce, ec.

L'Aritmetica frattanto essendo fondamentale per tutte, sarà di mestieri cominciare da essa.

ELEMENTI DI ARITMETICA

Sistema di Numerazione.

*1. I *Numeri*, oggetto dell'Aritmetica, sono collezioni o aggregati di unità, siccome già dicevamo. L'*unità aritmetica* è quella grandezza determinata dalla convenzione o dalla natura, della quale siamo obbligati a fare uso tutte le volte che vuol valutarsi una data grandezza della medesima specie. Volendo sapere, per modo d'esempio, *quant'*è una data distanza, fa di mestieri confrontarla con un'altra distanza di grandezza determinata e fissa, della quale si viene in tal modo a costituire un'*unità convenzionale*. Se si trattasse invece di acquistare una cognizione precisa del *quantitativo* di più oggetti simili raccolti insieme, saremmo indotti naturalmente a riguardare quell'aggregato come risultante dalla ripetizione di *un* solo e medesimo oggetto, ed avremmo così in ciascheduno di essi un'*unità naturale*. In generale l'idea di quantità essendo sempre un'idea *relativa*, suppone necessariamente il termine di paragone al quale si riferisce, ed è questo termine che costituisce l'unità di cui parliamo, come pure abbiam detto. Incorrerebbe adunque in un grave errore chi confondesse l'unità aritmetica con l'*unità metafisica*. Risulta infatti dalla definizione che abbiamo data dell'unità numerica che essa è composta e moltiplice, mentre non può ignorarsi da alcuno che l'unità *assoluta* o, come suol dirsi, *metafisica* è semplice e indivisibile, motivo per cui non è nemmen definibile; il che non toglie peraltro che tutti ne abbiano un'idea chiara e distinta, senza la quale non solo non potrebbe concepirsi l'unità aritmetica, ma di più niuna Scienza sarebbe possibile.

I numeri adunque sono aggregati di unità, ma di unità complesse o risultanti da parti, le quali pure possono riguardarsi come unità di un ordine inferiore e quindi assoggettarsi al calcolo: ciò che effettivamente facciamo nella teoria dei numeri *frazionarj*, ossia dei *rotti*, i quali risultano appunto dalla scomposizione dell'unità in parti eguali, e dalla riunione di alcune di queste parti, come meglio vedremo dopo aver trattato dei numeri *interi*, vale a dire, di quei numeri l'unità dei quali si ha per un tutto senza aver riguardo alle parti in cui può concepirsi divisa.

*2. Si formano i numeri secondo il loro ordine di grandezza successivamente crescente, prima aggiungendo un'unità a un'unità, quindi alla riunione

di esse aggiungendo un'altra unità, un'altra ancora all'aggregato delle precedenti, e così di seguito. Onde ogni numero si ottiene coll'aggiunta di un'unità a quello che lo precede immediatamente.

Nella formazione dei numeri si fa ben presto sentire il bisogno di attribuire a ciascheduno di essi un segno particolare, che valga a rappresentarlo e a distinguerlo da ogni altro numero; e questo bisogno esige imperiosamente di esser soddisfatto: imperciocchè se le nostre idee non sono per dir così rivestite e fissate da segni, ci sfuggono nè posson riflettersi. Ma il numero dei differenti numeri essendo *infinito*, cioè senza alcun limite di grandezza, poichè nulla vieta che un numero grande quanto si voglia rendasi anche maggiore con l'aggiunta di un'altra unità, sarebbe manifestamente impossibile l'assegnare a ciascun numero un segno particolare. Ora quello che non si sarebbe mai conseguito con segni del tutto arbitrarj e indipendenti gli uni dagli altri, si ottiene con mirabile facilità dal così detto *sistema di numerazione*, vale a dire da un ingegnoso sistema di denominazioni e di cifre opportunamente combinate tra loro. Dei varj sistemi che possono esistere secondo la varietà dei segni e del modo di combinarli per la rappresentazione dei differenti numeri, noi esporremo il sistema *decimale*, che è quello generalmente adottato, e ci occuperemo prima dei *nomi* o segni parlati, e quindi delle *cifre* o segni scritti, coi quali si rappresentano i numeri in questo sistema.

*3. I nomi respettivamente assegnati all'unità e ai primi numeri, che si formano nel modo indicato al principio del paragrafo precedente, sono

uno due tre quattro cinque sei sette otto nove.

I numeri che abbiamo nominati si chiamano *semplici*; e *composti* tutti i rimanenti. Il primo dei numeri composti si forma aggiungendo un'unità al nove, e chiamasi *dieci*. Ora il dieci vien riguardato come una nuova unità che si distingue dall'unità elementare o di *primo ordine*, dicendola del *secondo ordine:* dieci unità del secondo ordine si riguardano nello stesso modo come costituenti un'unità anche più complessa della precedente, e dicesi del *terzo ordine:* dieci unità del terzo ordine ne formano similmente una del quarto; e in generale dieci unità di un dato ordine ne formano una dell'ordine immediatamente superiore. I nomi delle unità dei differenti ordini sono i seguenti:

Ordini di unità	Nomi corrispondenti	
Primo	Unità	
Secondo	Diecine	
Terzo	Centinaia	
Quarto	Unità	di migliaia
Quinto	Diecine	di migliaia
Sesto	Centinaia	di migliaia
Settimo	Unità	di milioni
Ottavo	Diecine	di milioni
Nono	Centinaia	di milioni

Decima	Unità	di migliaia di milioni
Undecimo	Diecine	
Duodecimo	Centinaia	

Ai *milioni* succedano i *bilioni* che hanno, come i milioni, *unità, diecine* e *centinaia; unità, diecine e centinaia di migliaia*. Ne vengono quindi nello stesso modo i *trilioni, quadrilioni* ec. (a)

I nomi particolari delle diecine sono: *dieci, venti, trenta, quaranta, cinquanta, sessanta, settanta, ottanta, novanta.* Quelli delle centinaia, migliaia ec. si compongono premettendo i nomi dei numeri semplici alle voci *cento, mila*, ec. Così per esprimere cinque centinaia. sette migliaia, si dice *cinquecento, settemila.* Finalmente ci resta a dire che i numeri compresi tra dieci e venti si enunciano, *undici, dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici, diciassette, diciotto, diciannove*, e che tutti gli altri numeri composti si enunciano esprimendo successivamente i nomi delle collezioni dei vari ordini di unità che contengono; così un numero formato di cinque centinaia, sette diecine e nove unità, si enuncia *cinquecento settanta nove.*

*4. Le *cifre* con le quali si esprimono respettivamente i numeri semplici son le seguenti:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Queste stesse cifre valgono a rappresentare le unità di tutti gli ordini superiori: così la cifra 8 tanto s'impiega per esprimere otto unità semplici, quanto per esprimere otto diecine, otto centinaia, otto migliaia, otto milioni, otto centinaia di migliaia di milioni. Se non che quando rappresenta semplici unità si pone assolutamente e senz'altro aggiunto; quando rappresenta diecine o unità di second'ordine, le si pone alla destra uno zero « 0 », due zeri quando rappresenta centinaia, tre quando rappresenta migliaia, e così sempre uno zero di più per ogni ordine successivo. Per tal modo mentre 8 non rappresentava che otto unità semplici, con 80 si rappresentano otto diecine, con 800, 8000 ec. si rappresentano otto centinaia, otto migliaia ec. Lo zero è dunque un indice immaginato per fissare l'ordine, al quale debbono riferirsi le unità rappresentate da ciascuna cifra semplice, ed esprime la mancanza assoluta di ogni quantità.

5. Ma il dato numero sia composto di più ordini di unità. La convenzione ha stabilito, che scritta la cifra dell'unità d'ordine maggiore, si ponga alla destra di essa quella dell'ordine immediatamente seguente, e quindi con lo stesso metodo quelle di tutti gli ordini successivi, e gli zeri si faccian rimaner soltanto nei luoghi degli ordini che mancassero. Così il numero *cinquemila seicento trenta quattro* si scrive 5634; ed il numero *trecentomila cento sessan-*

(a) I Francesi, gl'Inglesi o gli Spagnuoli non contano le migliaia dei milioni, bilioni, trilioni ec. e passano immediatamente dalle centinaia di milioni alle unità di bilioni, dalle centinaia dei bilioni alle unità dei trilioni e così di seguito. Il bilione adunque dei Francesi, che essi chiamano anche *miliardo*, corrisponde a mille milioni nel nostro modo di computare.

ta, ove mancano le diecine e unità di migliaia e le unità semplici, si scrive 300160.

*6. È da notarsi, che con questa maniera di scrivere i numeri si viene a collocare ciascuna cifra nel posto conveniente all'ordine di unità, da essa rappresentato, cioè nel primo posto a destra la cifra delle unità semplici o di primo ordine, nel secondo posto la cifra delle diecine o unità di second'ordine, nel terzo quella delle centinaia o unità di terz'ordine, ec.; e che appunto per soddisfare a questa condizione, si riempiono con altrettanti zeri i posti delle unità di quegli ordini, che nel numero da scriversi mancano. Segue da ciò; 1.° che ogni cifra numerica in combinazione con altre cifre, oltre il suo valore proprio, consistente nel numero di unità che rappresenta, ha di più un valore relativo, esprimente l'ordine delle unità, e dipendente dal posto in cui è collocata. 2.° Che spostando una cifra, mentre il suo valore assoluto resta inalterato, se ne cangia il valore relativo che diviene dieci, cento, mille ec. volte maggiore o minore, secondochè il traslocamento si fa da destra a sinistra, o viceversa, per uno, due, tre ec. posti. 3.° Che aggiungendo degli zeri alla destra di un numero, esso acquista un valore di dieci in dieci volte maggiore per ogni zero che si aggiunge, perchè per tal modo si vengono ad inoltrare da destra a sinistra di altrettanti posti tutte le cifre che lo compongono. 4.° Infine che per l'opposta ragione, se esistano e si sopprimano degli zeri alla destra di un numero, questo diventerà dieci, cento, mille ec. volte minore, secondochè sono uno, due, tre ec. gli zeri soppressi.

*7. Per leggere un numero scritto in cifre, ossia per tradurlo nel linguaggio parlato, converrebbe esprimere successivamente il valore assoluto e relativo di ciascheduna delle sue cifre dalla prima sino all'ultima, desumendo il valore relativo di ogni cifra dal posto che essa occupa nel numero dato; ma questo modo risulterebbe lungo e monotono, attesa l'inutile ripetizione di certi nomi alla quale darebbe luogo, specialmente quando si trattasse di numeri molto grandi. Perchè la lettura riesca più facile e più spedita, si separano le cifre del numero che deve leggersi in classi di tre per tre, cominciando dall'ultima a destra, e non curando che l'estrema classe a sinistra rimanga incompleta. Quindi si legge ogni classe come se fosse isolata; se non che mentre dopo la lettura di ognuna delle classi 2.ª, 4.ª, 6.ª, ec. (contando da destra a sinistra) si pronunzia sempre la voce *mila*, dopo la lettura di ognuna delle classi 3.ª, 5.ª, 7.ª, ec. (contando nello stesso modo) si pronunziano invece le voci *milioni, bilioni, trilioni* ec. Gli zeri poi si tacciono sempre ovunque s'incontrano. Con ciò il numero 1 030 010 125 812 600 003 separato, come vedesi, in classi, si leggerà *un trilione, trentamila dieci bilioni, centoventicinque mila ottocento dodici milioni, seicento mila tre.* La separazione delle classi si suole anche fare per mezzo di virgole, e di più si suol segnare la lettera *m*, iniziale della parola *mila*, sopra le classi 2.ª, 4.ª, 6.ª ec.; e sopra le classi 3.ª, 5.ª, 7.ª ec. i numeri 1. 2. 3. ec. che poi debbon leggersi respettivamente *milioni, bilioni, trilioni* ec. Così il numero precedente sarebbe disposto nella maniera la più comoda per la lettura contrassegnandolo come segue:

3 m 2 m 1 m
1,030,010,125,812,600,003.

Ciascuna delle classi di cui abbiamo parlato, ha una denominazione particolare. L'ultima a destra si chiama classe delle centinaia; la seguente, classe delle migliaia; le altre, classi delle centinaia di milioni, delle migliaia di milioni, delle centinaia di bilioni, delle migliaia di bilioni, e così seguitando.

8. Rimane da osservare che, qualunque sia il numero, la prima cifra a sinistra, per quanto possa esser piccola, ha un valore relativo più grande del numero rappresentato da tutte le rimanenti; ed aumentandola di una sola unità, il numero cresce assai più, che se si aumentino quanto si voglia tutte le altre cifre.

*9. Le proprietà e i rapporti dei numeri essendo manifestamente indipendenti dalle particolari specie di unità, da cui risultano i numeri stessi, noi ne tratteremo, quando non si avverta espressamente il contrario, senza aver riguardo alle varie specie di unità.

Del resto tutti i numeri tanto *interi* che *frazionarj* (1) essendo, come è chiaro, suscettibili di aumento e di diminuzione, possono assoggettarsi a due operazioni; l'una con la quale si aumentano chiamasi *addizione*; l'altra con la quale si scemano chiamasi *sottrazione*. Tutte le altre operazioni dell'Aritmetica dipendono più o meno, come vedremo, da queste due. Incominciamo da quelle, che si eseguiscono sopra i numeri interi.

Addizione.

*10. L'*Addizione* o, come anche suol dirsi, il *Sommare*, consiste nel trovare un sol numero equivalente a più numeri dati. Si accenna questa operazione in iscritto ponendo tra i numeri, che debbon sommarsi, il segno +, che leggesi *più*. Il risultato dell'operazione si scrive in linea dei numeri dati, facendolo precedere dal segno =, che si pronunzia *eguale*. Così per indicare che 4 deve sommarsi con 7, si scrive $7+4$; e per indicare che la somma di questi due numeri è 11, si scrive $7+4=11$.

*11. Se i numeri che debbon sommarsi son semplici, o se contengono un solo e medesimo ordine di unità, l'addizione si eseguisce aggiungendo al primo dei numeri dati le unità del secondo a una per volta, e si ha così la somma dei primi due; alla quale successivamente si uniscono a una per volta le unità del terzo; alla somma, che per tal modo si ottiene dei primi tre, si aggiungono in simil guisa le unità del quarto, e così di seguito, finchè vi sono numeri da sommarsi; ed è evidente che l'ultimo numero, che si trova operando in siffatta maniera, esprime la somma cercata, e l'esprime in unità del medesimo ordine di quelle dei numeri che si sono sommati. Se per esempio, i numeri da sommarsi fossero 8, 4 e 3, diremmo: otto e uno fa nove, nove e uno dieci, dieci e uno undici, undici e uno dodici, e così avremmo la somma di 8 con 4; alla quale si aggiungerebbe il numero tre, dicendo: dodici e uno fa tredici, tredici e uno quattordici, quattordici e uno quindici. Sicchè

avremmo 8+4+3=15. Qui il numero 15 esprime unità semplici, perchè tali son quelle dei numeri che abbiamo sommati. Se i numeri stessi avessero espresse unità di un ordine superiore al primo, p. e. del quarto, avremmo operato precisamente nello stesso modo, se non che dicendo: otto e uno fa nove, nove e uno fa dieci, ec. avremmo tacitamente inteso di dire otto unità del quarto ordine, ossia otto migliaia e una ne fanno nove, nove migliaia e una ne fanno dieci, ec. e quindi avremmo ottenuto per risultato finale quindici migliaia o unità del quarto ordine, talmente che si sarebbe trovato 8000+4000+3000=15000. Questo è il processo al quale siamo obbligati a ricorrere per l'addizione dei numeri semplici, finchè l'abitudine del calcolo non ce ne dispensa imprimendone i risultati nella memoria; il che peraltro succede generalmente assai presto.

12. Quanto ai numeri composti, è evidente che la loro somma totale deve equivalere alle somme parziali delle loro unità, delle loro diecine, centinaia ec. Come però la somma dell'unità può contenere una o più diecine, quella delle diecine può contenere una o più centinaia ec., quindi perchè la somma intera risulti classata con l'ordine stabilito (5), converrà che il numero di diecine contenute nella somma delle unità si unisca alla somma delle diecine; quello delle centinaia contenute nella somma delle diecine si unisca alla somma delle centinaia, e così di seguito. Tutto questo conduce direttamente alla seguente regola pratica: *si scrivano gli uni sotto gli altri i numeri da sommarsi, in modo che le cifre del medesimo ordine si corrispondano in una stessa colonna. Quindi si sommino ad una ad una ed in ordine tutte le classi* o *colonne, cominciando da quella delle unità semplici; e si avverta di* portare o *aggiungere alla somma delle diecine il numero delle diecine contenute nella somma delle unità semplici; alla somma delle centinaia il numero delle centinaia contenute in quella delle diecine ec.* A schiarimento della qual pratica serviranno gli esempj che seguono.

34	4526	73	42
672	31	4156	768
89	129	8	909
274	82	43	31
1069	4768	4280	1750

Sottrazione.

13. Con la *sottrazione* si trova la *differenza* che passa fra due numeri dati, o il *resto*, o *avanzo* che si ottiene togliendo il minore del maggiore, oppure ciò che bisogna aggiungere al minore per eguagliarlo al maggiore. Il maggiore dei due numeri dati si chiama *diminuendo*, il minore *diminutore*, e il loro risultato *resto* o *differenza*.

*Si accenna questa operazione, interponendo al diminuendo e al diminutore scritti in una medesima linea orizzontale il segno —, che si legge *meno*.

*14. Quando si tratta di numeri semplici, oppure di numeri contenenti un solo e medesimo ordine di unità, si eseguisce la sottrazione togliendo a una per volta le unità del diminutore da quelle del diminuendo, e ciò che avanza è evidentemente la differenza richiesta; la quale potrebbe anche trovarsi tenendo conto delle unità che, aggiunte ad una per volta al diminutore, lo rendono eguale al diminuendo. Si operi nell'una o nell'altra maniera, avremo egualmente che 9—4=5, 800—500=300.

15. Se i dati numeri son composti, è chiaro che la lor differenza dovrebbe equivalere a quella delle loro unità, delle loro diecine, centinaia ec. E sarebbe quindi facile l'ottenerla, per dir così, a colpo d'occhio, qualora tutte le unità di ciascun ordine del diminuendo fossero respettivamente maggiori delle unità corrispondenti del diminutore. Così se debba sottrarsi 258 da 579, ove il diminuendo ha 3 centinaia, 2 diecine, ed un'unità più del diminutore, tosto si scorge che la differenza è 321.

Ma questa supposizione potendo non verificarsi ne' più dei casi, si terrà perciò la regola seguente: *scritti i due numeri l'uno sotto l'altro, il minore cioè sotto il maggiore, in modo che le unità di ciascun ordine si corrispondano in colonna, si tolgano le unità del numero inferiore dalle loro corrispondenti nel superiore, ed ogni qualvolta queste sieno minori di quelle, si accrescano di dieci, e si consideri come diminuita di un'unità la cifra seguente del diminuendo.* Con ciò la sottrazione, ordine per ordine, è resa sempre possibile, nè risulta men vera la differenza finale. Infatti, siccome ogni unità d'un ordine corrisponde a 10 unità dell'ordine immediatamente inferiore (3); se dunque quello si diminuisce di un'unità, e questo si accresce di 10, il valore effettivo del diminuendo non resta in modo alcuno alterato; e frattanto le 10 unità aggiunte, rendendo le cifre del diminuendo immancabilmente maggiori delle cifre sottoposte del diminutore, che non possono oltrepassare il 9, potremo sempre toglier queste da quelle. Con tal regola si troverà 13852—3684=10168, e 97131—96874=257.

16. Osservazione I.ª Se la cifra del diminuendo, per la quale occorre l'aumento di 10, sia preceduta da uno o anche più zeri, staccheremo l'unità dalla prima cifra significativa che incontreremo sulla sinistra, e considereremo come 9 tutti gli zeri intermedj. Infatti se lo zero è un solo, l'unità staccata dalla cifra precedente lo converte in 10, che poi si cangia in 9 per l'unità che presta alla cifra che segue; e se son più zeri di seguito, il primo già convertito in 10 si cangia in 9 per l'unità che presta al secondo, come del pari questo già divenuto 10 si cangia in 9 per l'unità che presta al terzo ec. Con ciò troveremo 20050—5678=14372; 7000—145=6855.

Oss. II.ª Se, come talvolta accaderà, il diminutore sia maggiore del diminuendo, si sottrarrà questo da quello, ed il resto si farà precedere dal segno *meno*.

Oss. III.ª Il resto, non essendo che l'eccesso del diminuendo sul diminutore, aggiunto al diminutore deve dunque rendere il diminuendo, il che può servir di prova all'operazione.

Oss. IV.ª In luogo di togliere, come abbiamo fatto, le cifre inferiori dalle superiori, si può avere il resto computando ciò che manca alle prime per giungere o *andare* alle seconde, aumentate all'occorrenza dell'opportuna diecina. Debbasi sottrarre 3947 da 5379. Dirò: dal 7 per andare al 9 mancano 2 unità, che segno; dal 4 al 7 mancano 3 unità, che segno alla sinistra del 2; dal 9 al 3 non può andarsi, ma sì può bensì andare al 13 con 4 unità, che segno alla sinistra delle precedenti; e considerando il 5 come ridotto a 4 per la diecina prestata al 3, dirò dal 3 al 4 manca un'unità, che segno come sopra, ed ho il resto totale 1432.

Una più grande abitudine al calcolo insegnerà a sottrar più speditamente *sommando* nel modo che segue. Vogliasi sottrarre 6358 da 11834. Dirò: 8 e 6 fanno 14; segno 6 e porto 1: 5 e 1 che porto 6, e 7 fanno 13; segno 7 e porto 1; 3 ed 1 che porto 4, e 4 fanno 8; segno 4 e porto nulla; 6 e 5 fanno 11; segno 5, ed ho di resto 5476. Nel qual modo d'operare è manifesto, che le quantità le quali si sommano con le cifre del diminutore sono precisamente quelle che ad esse mancano per giungere alle cifre corrispondenti del diminuendo (13).

Moltiplicazione.

17. La *moltiplicazione* è un modo compendioso di sommare, nel caso che i numeri da sommarsi sieno tutti fra loro eguali. Può definirsi come *l'operazione, con la quale si trova speditamente la somma di un numero tante volte ripetuto, quante unità sono in un altro.* Il primo di questi due numeri dicesi *moltiplicando*, l'altro *moltiplicatore;* e con nome comune *fattori;* ciò che risulta dall'operazione si chiama *prodotto.* Per indicar la moltiplicazione si usa interporre fra i due fattori o un *punto*, o il segno $\times$, che si leggono *moltiplicato per.* Così volendo esprimere che il 6 moltiplicato per 3, o preso tre volte dà 18, si scrive $6.3=18$, oppure $6\times3=18$. Generalmente useremo di porre il moltiplicatore alla destra del segno; il moltiplicando alla sinistra.

18. Nella moltiplicazione possono darsi tre casi differenti: o i due fattori sono numeri semplici; o il moltiplicatore è semplice, ed il moltiplicando composto; o sono ambedue composti.

Per moltiplicare nel primo caso, non vi è altro mezzo diretto fuorchè quello di ricorrere all'addizione. Così per avere il prodotto di 8 per 4, bisogna sommare l'8 quattro volte, ossia trovare il numero che equivale a $8+8+8+8$ che è 32. Ma i prodotti dei numeri semplici son così pochi, che l'esercizio insegna a trovarli ben presto. Intanto prima che giungasi a questo punto si può ricorrere alla tavoletta che segue, nella quale le cifre segnate in fronte e nella colonna marginale sinistra son destinate a rappresentare i fattori, ed il prodotto si trova portandoci sulla colonna che ha in fronte l'uno dei fattori dati, e scendendo finchè non si giunga in linea del numero marginale corrispondente all'altro fattore. Così troveremo che $6\times7=42$; $5\times8=40$; $9\times3=27$. E qui sarà non inutile osser-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

vare, che i prodotti sono ora d'una, ora di due cifre: quando sono di una sola cifra, essa supera ciascuno dei due fattori; quando son due, la prima di esse è minore dell'uno e dell'altro, nè mai giunge a 9.

19. Nel 2.° caso avremo il prodotto con moltiplicare successivamente per il dato moltiplicatore le unità di ciascun ordine del moltiplicando, facendoci dall'ultima a destra o dall'unità semplici; ed avvertendo di *portare* o aggiungere al prodotto parziale delle diecine il numero delle diecine contenute in quello delle unità, al prodotto parziale delle centinaia il numero delle centinaia contenute in quello delle diecine, e così di seguito. In tal modo troveremo che $1738\times6=10428$; $3961\times5=19805$. Questa regola, in tutto conforme a quella già data per la somma (12), e fondata sugli stessi principj, non ha bisogno d'ulteriore dimostrazione.

20. Piuttosto osserveremo

1.° che se nel moltiplicando abbiasi qualche zero, il suo prodotto, qualunque siasi il moltiplicatore, è sempre nullo.

2.° Qualora le unità del moltiplicatore in luogo di esser semplici o del prim'ordine, sieno d'un ordine qualunque maggiore (4), come per esempio se in vece di 6 si avesse 60, 600, 6000, potrà operarsi come se fossero semplici; ma dovremo aggiungere alla destra del prodotto uno zero se son diecine, due se centinaia, tre se migliaia ec.

Infatti siccome il moltiplicatore passando dall'ordine delle semplici unità a quello di diecine, di centinaia, di migliaia acquista un valore dieci, cento, mille volte più grande (6. 3.°), anche il prodotto dovrà dunque risultare dieci, cento, mille volte maggiore, al che l'aggiunta finale d'uno, due, tre zeri ec. completamente supplisce.

21. Questa osservazione pone in piena evidenza la regola seguente per l'ultimo dei tre casi, quando cioè il moltiplicatore è composto. *Si facciano i prodotti di tutto intero il moltiplicando per le unità di ciascun ordine del moltiplicatore, considerandole come se fossero semplici ed isolate, avvertendo però di aggiungere uno zero alla destra di quello delle diecine, due a quello delle centinaia, ec. Si sommino in seguito tutti i prodotti parziali così ottenuti, ed avremo il prodotto totale cercato.* Eccone degli esempj

374856×826	146327×5099
3449136	1316943
11497120	13169430
459884800	731635000
474831056	746121373

22. Si noti 1.° che siccome la prima cifra del moltiplicatore ha un valore relativo più grande di tutta la parte seguente (8), così anche il suo prodotto per l'intero moltiplicando è maggiore della somma di tutti i prodotti parziali antecedenti. Nel modo medesimo e per le stesse ragioni ciascun prodotto parziale supera la somma di tutti quelli che lo precedono.

2.° Se dal prodotto totale si tolga l'ultimo e maggiore dei prodotti parziali, il resto equivarrà al prodotto del moltiplicatore spogliato della sua prima cifra a sinistra, o della cifra d'ordine più elevato. Così se il moltiplicatore è composto di migliaia, centinaia, diecine ed unità, tolto l'ultimo prodotto o quello per le migliaia, il resto equivarrà al prodotto del moltiplicatore ridotto alle sole centinaia, diecine ed unità; se in seguito si toglie anche quello per le centinaia, il nuovo resto conterrà la somma dei prodotti per le diecine ed unità ec.

3.° Siccome gli zeri aggiunti a ciascun prodotto parziale non influiscono nella somma finale, potremo anche non segnarli, purchè le unità del prodotto per le diecine del moltiplicatore, si scrivano sotto le diecine del prodotto per l'unità semplici, quelle del prodotto per le centinaia sotto le centinaia; e così di seguito.

4.° Se nel moltiplicatore s'incontri o uno zero come nel secondo esempio, o un seguito di zeri, il loro prodotto pel moltiplicando essendo nullo, potremo ometterlo affatto; ferma stante però la disposizione dei prodotti successivi secondo l'ordine precedentemente stabilito.

5.° La moltiplicazione può anche effettuarsi in ordine inverso, cominciando cioè dalla prima cifra a sinistra del moltiplicatore. Ma i prodotti parziali dovranno allora segnarsi in modo, che le diecine del secondo cadano sotto le unità del primo, quelle del terzo sotto le unità del secondo ec.; cosicchè ciascun prodotto sporga con una cifra al di fuori del suo precedente. Se peraltro il moltiplicatore abbia o uno zero, o un seguito di più zeri, il cui prodotto come abbiam detto si tralascia, dovremo fare sporgere altrettante cifre di più nel prodotto che segue. Tutto ciò si rende evidente qualora si ristabiliscano gli zeri competenti a ciascun prodotto parziale.

6.° Qualunque sieno i fattori, è sempre lecito invertir l'ordine con cui son dati, cioè prender l'uno in luogo dell'altro per moltiplicatore o per moltiplicando. Così abbiamo lo stesso prodotto 15, o si moltiplichi 5 per 3, o 3 per 5, come anche risulta dalla Tavoletta (18). Infatti moltiplicando 5 per 3 non si fa che prendere tre volte ciascuna delle cinque unità com-

ponenti il numero 5. Ma ciascuna di queste unità presa tre volte dà 3: tutte le cinque unità daranno dunque cinque volte il 3, ossia l'equivalente del 3 preso cinque volte o moltiplicato per 5 (17).

7.° Può aversi un prodotto anche da un più gran numero di fattori. Così se il 63, prodotto del 7 per 9, si moltiplichi per 5, il nuovo prodotto 315 potrà considerarsi come proveniente dai tre fattori 7, 9, 5; il che si esprime scrivendo $7\times9\times5=315$. Incontrandosi espressioni di questa natura dovremo dunque operare sui primi due fattori, moltiplicarne il prodotto per il terzo, il nuovo prodotto per il quarto, e così di seguito. Vero è che potendo qui pure aver luogo l'inversione dei fattori, non sarà rigorosamente necessario di seguir l'ordine col quale son dati.

Di qui intanto si deduce, che se il moltiplicatore, o anche il moltiplicando, o l'uno e l'altro insieme manchino delle unità degli ultimi ordini, ossia se le loro ultime cifre sieno zeri (6), opereremo con le rimanenti come se non vi fossero questi zeri, che poi apporremo in egual numero alla destra del prodotto finale. Così se debba moltiplicarsi 7000 per 40; moltiplicheremo 7 per 4, e segneremo 280000 in prodotto. Infatti (4) $7000=7\times1000$, $40=4\times10$; dunque $7000\times40=7\times1000\times4\times10=7\times4\times1000\times10=28\times10000=280000$.

23. Allorchè i fattori son numeri molto grandi, come se si dovesse moltiplicare 38510364891 per 4836501279, gioverà di preparare innanzi i prodotti del moltiplicando per ciascuna delle 9 cifre semplici, col facilissimo modo che segue. Scritto il moltiplicando come dicontro, si segni sotto il medesimo il suo prodotto per 2. Se questo si sommi col moltiplicando, avremo visibilmente il prodotto per 3 (17); e se questo pure si sommi col moltiplicando avremo il prodotto per 4. Così proseguendo avremo tutti i successivi prodotti per ciascuna delle altre cifre semplici; ai quali potremo aggiungere anche quello per 10, unicamente per riprova; poichè, se l'operazione è ben fatta, questo deve trovarsi in tutto eguale al moltiplicando, con più uno zero in ultimo a destra della cifra finale (6. 3.°). E se di fianco a ciascun prodotto avremo cura di segnar la cifra semplice da cui risulta, non resterà per eseguire la moltiplicazione che prendere in ordine i prodotti corrispondenti a ciascuna cifra del moltiplicatore, disporli nel modo già stabilito (22. 3.°), e quindi tutti sommarli.

38510364891	1
77020729782	2
115531094673	3
154041459564	4
192551824455	5
231062189346	6
269572554237	7
308082919128	8
346593284019	9
385103648910	10

24. Noteremo 1.° che i prodotti così ottenuti per le cifre semplici si cangiano in prodotti per le corrispondenti unità di diecine, centinaia ec. con la sola aggiunta d'uno, due o più zeri (6. 3.°); 2.° reciprocamente le cifre di fianco dovranno riguardarsi come diecine, se uno è lo zero aggiunto; come centinaia se son due, ec. il che tutto è evidente.

25. La prova diretta della moltiplicazione si ha dalla divisione come più sotto vedremo (29. 4.°). Ma assai più comoda, e quindi molto usitata

è la seguente, sebbene indiretta ed in alcuni pochi casi fallace. Sommo separatamente e fra loro le cifre prima dell'uno, poi dell'altro fattore, e in fine del prodotto; ma in modo che ogni qual volta nel sommare giungo ad un numero maggiore di 9, rigetto il 9 e ritengo solo l'eccesso per continuare la somma. Avrò così tre resti finali, che non potranno essere se non numeri semplici e minori di 9. Moltiplico i primi due, quelli cioè provenuti dai due fattori, e sommo le cifre del loro prodotto. Se questa somma eguaglia il terzo resto, quello cioè provenuto dal dato prodotto, o se non ne differisce che di 9 unità, l'operazione potrà supporsi ben fatta. Così ripreso il primo esempio di sopra (21), dal moltiplicatore 826, operando nel modo prescritto, ho il resto 7; dal moltiplicando 574856 ho il resto 8, dal prodotto 474831056 ho 2. I due primi, moltiplicati, danno 56, le cui cifre sommate danno 11; il qual numero differendo di 9 unità dal resto 2 del prodotto, mostra che l'operazione può supporsi ben fatta.

Vedremo a suo luogo i fondamenti di questa regola, volgarmente conosciuta col nome di *riprova del* 9. Essa è fallace, 1.° quando nel prodotto sia stato scritto uno zero in luogo del 9, e viceversa; 2.° quando o l'una o l'altra di queste cifre sia stata o aggiunta o soppressa; 3.° quando siansi trasposte due o più cifre; 4.° quando gli errori commessi in una parte del prodotto sieno compensati da altri, commessi in senso opposto nell'altra. È infatti evidente, che in ciascuno di questi quattro casi la somma delle cifre torna la stessa, o toltone il 9 dà il medesimo avanzo. È però sempre vero che se la riprova, quando sia ben fatta, non torna, vi è certamente errore nel prodotto finale.

Divisione.

26. La *divisione* è un'operazione con la quale si trova quante volte un numero è contenuto in un altro.

Ora è manifesto che un numero è contenuto in un altro tante volte, quante ne potrebbe esser sottratto; e perciò la via naturale per giungere a queste ricerche sarebbe di sottrarre quante volte si può il minore dal maggiore. Con ciò si troverebbe, per esempio, che il 12 contiene il 4 esattamente 3 volte; perchè sottraendo il 4 da 12 si ha 8, sottraendo di nuovo si ha 4, e sottraendo di nuovo nulla avanza. E parimente si troverebbe che il 9 è contenuto 2 volte nel 23, ed avanzano inoltre 5 unità; poichè da una prima sottrazione si ha 14, da una seconda si ha 5, che essendo minor di 9 non dà luogo a sottrazioni ulteriori. Questo metodo porterebbe per altro assai in luogo, e sarebbe nei più dei casi impraticabile, atteso il gran numero di sottrazioni che occorrerebbe di fare; perciò è stata immaginata la *divisione*, col cui mezzo le sottrazioni son risparmiate, e si giunge all'intento medesimo, ma con calcolo sommamente più breve. Prima di darne le regole premetteremo le seguenti nozioni.

27. Il maggiore dei due numeri, o quello che generalmente si tratta di dividere, si chiama *dividendo:* il minore, o quello che dovrebbe sottrarsi o per cui si divide, si chiama *divisore:* il risultamento, o il numero delle volte che il dividendo contiene il divisore, *quoto* o *quoziente*, e l'avanzo finale *resto* della divisione. Così nel primo esempio (26) sarebbe 12 il dividendo, 4 il divisore, 3 il quoziente; e nel secondo 23 il dividendo, 9 il divisore, 2 il quoziente, 5 il resto.

28. Quando non vi è resto, come nel primo esempio, il quoziente dicesi *esatto*, e l' operazione si accenna brevemente scrivendo $\frac{12}{4}=3$, oppure $12:4=3$, ove tanto la linea, che i due punti interposti fra il dividendo a sinistra e il divisore a destra, si pronunziano *diviso per*, e indican sempre una divisione da farsi. Quando vi è un resto, si pone alla destra del quoziente, facendolo precedere dal segno + e sotto di esso, interposta una linea, si segna il divisore. Così nel secondo esempio si scriverebbe $\frac{23}{9}=2+\frac{5}{9}$, con che viene ad indicarsi che il 23 contiene il 9 due volte, e restano ancora 5 unità da dividersi in 9 parti. Il quoziente unito al resto prende il nome di *quoziente completo;* separato prende quello di *quoziente particolare*. Il resto, qualunque sia, deve esser sempre più piccolo del divisore, comecchè equivalente ad una quantità da cui il divisore non può sottrarsi (26).

29. Se quante volte si è potuto togliere o sottrarre il divisore dal dividendo, altrettante volte si aggiunga al resto avuto, è visibile che verrà a riprodursi il dividendo (16. III.°). E poichè il numero di tutte le possibili sottrazioni è indicato dalle unità del quoziente (26), prendendo dunque il divisore tante volte, quante son queste unità, ossia moltiplicandolo per il quoziente (19), e aggiungendo il resto al prodotto, avremo il dividendo. Così da $\frac{23}{9}=2+\frac{5}{9}$ viene $2\times9+5=18+5=23$. Dunque 1.° *il dividendo eguaglia il prodotto del quoziente nel divisore, più il resto.* Quindi 2.° *se il resto è nullo, il prodotto del divisore nel quoziente deve eguagliare il dividendo;* e perciò 3.° *se nel caso del resto nullo, si divida il dividendo per il quoziente ottenuto, avremo per nuovo quoziente il divisore:* altrimenti questo moltiplicato per quello non riprodurrebbe il dividendo: d'onde 4.° *se un prodotto dato si divida per uno qualunque dei suoi fattori, dovremo aver l'altro in quoziente;* nel che appunto consiste la prova diretta della moltiplicazione, di cui parlammo di sopra (25). Che se il prodotto abbia più fattori (22. 7.°), dividendo per uno di essi, dovremo, siccome è chiaro, aver per quoziente il prodotto dei rimanenti; il che seguirà pure, se si divida per il prodotto di due dei medesimi, di tre ec.; e in ogni caso il quoziente sarà sempre esatto. Così se il 30, prodotto di 2, di 3 e di 5, si divida per 2, avremo il quoziente 15, prodotto di 3 per 5; se per 3, avremo 10, prodotto di 2 per 5; se per 5, avremo 6, prodotto di 2 per 3; e

potremo anche dividerlo per 6, per 10, per 15 e per 30, prodotti di 2×3, di 2×5, di 3×5, e di 6×5, o di $2\times3\times5$. Più in generale potremo quindi stabilire 5.° *che se un numero sia divisibile esattamente per due o più numeri dati, sarà divisibile altresì per tutti i prodotti che possono formarsi, moltiplicandoli o tutti, o parte fra loro.*

*30. Dovendo il quoziente soddisfare alla condizione, che moltiplicato per il divisore e aggiunto il resto al prodotto si riproduca il dividendo, ne segue, che con un dividendo due, tre, quattro ec. volte maggiore di un altro, e con un divisore sempre lo stesso, dee risultare un quoziente due, tre, quattro ec. volte respettivamente maggiore, e che con uno stesso dividendo e con un divisore due, tre, quattro ec. volte maggiore d'un altro, dee invece aversi un quoziente altrettante volte respettivamente minore. Dunque il quoziente aumenta e diminuisce insieme e nel medesimo modo del dividendo, e all'opposto diminuisce o cresce, secondochè si accresce o si scema il divisore. Se quindi simultaneamente si alterino nello stesso modo tanto il dividendo quanto il divisore, sia col moltiplicarli sia col dividerli ambedue per un medesimo numero, daran sempre luogo allo stesso quoziente. Così mentre $36:9$ è tre volte minore di $36:3$ e tre volte maggiore di $12:9$, sarà eguale a $12:3$, come pure a $24:6$, a $48:12$ ec. Da tuttociò, e da quanto è stato detto nel sistema di numerazione (1), potremo intanto concludere, che qualora il dividendo e il divisore siano terminati da zeri, non si altera in nulla il quoziente sopprimendone un egual numero alla loro destra, e che anzi potranno sopprimersi tutti gli zeri coi quali termina il dividendo, purchè dopo avere ottenuto il quoziente se ne pongano alla destra di questo tanti, quanti se ne sono soppressi nel dividendo più che nel divisore.

*31. Prima di procedere al modo di eseguire la divisione gioverà infine avvertire, che il quoziente di due numeri risulterà di una cifra soltanto sempre che il dividendo abbia il medesimo numero di cifre del divisore, o avendone una di più, la prima cifra a sinistra del dividendo sia inferiore alla prima del divisore; essendo manifesto che in questo caso il prodotto del divisore per il minimo quoziente di due cifre, cioè per 10, risulterebbe più grande del dividendo, mentre deve esser sempre più piccolo o eguale. Anzi se si rifletta, che moltiplicando il divisore per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del dividendo più di quelle del divisore, si ottiene un prodotto che ha lo stesso numero di cifre del dividendo, ne potremo agevolmente concludere che in generale *quante sono le cifre del dividendo più di quelle del divisore, altrettante o una più che altrettante ne risulteranno in quoziente, secondochè la prima cifra del divisore sarà maggiore o minore della prima del dividendo.* Quindi il numero delle cifre del quoziente si può sempre determinare prima di eseguire la divisione.

*32. Scendendo ora alle regole, tornerà comodo distinguere i seguenti tre casi. 1.° Che il dividendo e il divisore siano amdedue semplici, oppure che il dividendo abbia due cifre, purchè la prima di esse sia più piccola di quella del divisore. 2.° Che il dividendo e il divisore abbian più cifre,

ma che il dividendo sia minore del prodotto del divisore per 10. 3.° Che tanto il dividendo che il divisore siano composti e qualunque.

Per eseguire la divisione nel primo de' casi indicati, qualora non piaccia di ripetere finchè si può la sottrazione del divisore dal dividendo, si dovrà trovare per via di tentativi o col soccorso della tavola pittagorica (18) il numero che moltiplicato per il divisore dà il prodotto inferiormente più prossimo o eguale al dividendo, e il numero così trovato sarà il quoziente richiesto (29). Altrimenti potrà aversi il quoziente contando quante volte deve aggiungersi a sè stesso il divisore per arrivare o approssimarsi il più che si può al dividendo. Così per dividere 35 per 7, si dirà 7 e 7, 14; 14 e 7, 21; 21 e 7, 28; 28 e 7, 35, ciò che dà 35 : 7=5.

Se il dividendo e il divisore saran terminati da un egual numero di zeri, non se ne farà alcun conto (30); onde si troverà 2800:400=7; 460:80=$5+\frac{6}{8}$.

*33. Passando al secondo caso, gioverà in primo luogo supporre che il divisore non abbia più di due cifre. Se in ambedue i numeri dati si trascura la cifra delle unità semplici, rimarranno le diecine del dividendo espresse da una o due cifre da dividersi per le diecine del divisore espresse da una cifra soltanto, e quindi il caso attuale si ridurrà al precedente. Ognun vede peraltro che, operando in tal guisa, potrà aversi un quoziente maggior del dovere. Infatti, secondo il principio superiormente dimostrato (29), ogni dividendo dovendosi riguardare come proveniente dal prodotto di tutto il divisore per il quoziente, più il resto; si comprende assai facilmente che alcune delle diecine del dividendo possono provenire dal prodotto delle unità del divisore per le unità del quoziente, e altre ancora dal resto; e che in conseguenza presumendo le diecine del dividendo come derivate tutte dalle sole diecine del divisore, ciò che implicitamente si ammette effettuando la divisione sopra i due numeri dati senza riguardo alle loro unità, si incorre nel rischio di trovare un quoziente maggiore del vero. Ma questo rischio può nondimeno prevenirsi e scansarsi. A tale oggetto prima di segnare in quoziente il numero risultante dalla divisione delle sole diecine del dividendo per quelle del divisore, bisognerà assicurarsi che quanto rimane del dividendo tra diecine e unità superi o eguagli il prodotto delle unità del divisore per il quoziente trovato. Non verificandosi questa condizione, il quoziente sarà eccessivo, e converrà diminuirlo successivamente di unità in unità, finchè non restano tante diecine, che insieme con le unità del dividendo, facciano un numero maggiore di quello proveniente dalla moltiplicazione delle unità del divisore per il quoziente, ossia, per dirlo in altre parole, facciano un numero che contenga il divisore almeno tante volte quante sono le unità del quoziente. Rischiariamo questa dottrina con un esempio. Sia da dividersi 372 per 48. Impostata l'operazione come di contro, immaginate soppresse le unità semplici dei due numeri dati, ed eseguita, come nel primo caso la divisione sopra le diecine soltanto, si avrà un quoziente di 9 unità e una diecina di resto. Or sapendosi (29) che ogni dividendo è il pro-

```
        7
48 / 372
     336
     ---
      36
```

dotto del divisore più il resto, e perciò deve in ogni caso eguagliare o eccedere il detto prodotto: è chiaro che si potrebbe asserire con tutta sicurezza esser 9 le unità del quoziente di 372 diviso per 48, qualora il prodotto di 48 per 9 non eccedesse il dividendo 372. Ma perchè questo accadesse, bisognerebbe che quanto resta del dividendo dopo averne sottratto il prodotto delle 4 diecine del divisore per il quoziente 9 trovato, superasse o eguagliasse il prodotto delle 8 unità del divisore per lo stesso quoziente 9. E siccome il prodotto di 4 diecine per 9, è 360 che tolto da 372 dà 12, bisognerebbe che 12 non fosse minore di 8×9, bisognerebbe cioè che 12 contenesse 8 almeno 9 volte. Questa condizione non verificandosi nel nostro esempio, siamo avvertiti che il quoziente 9 è eccessivo. Riducendolo a 8 col togliergli un'unità, e sottraendone dal dividendo il prodotto per le 4 diecine del divisore, si avrebbe il resto 52 e questo essendo ancora minore 8×8 non contenendo cioè almeno 8 volte le 8 unità del divisore, siamo obbligati a concludere che anche 8 è un quoziente eccessivo. Scemandolo ancora di un'unità, soddisfa alla condizione indicata, perchè 7 unità moltiplicate per 4 diecine, danno di resto 9 diecine che con le 2 unità del dividendo formano il numero 92 maggiore di 8 moltiplicato per 7, e quindi è 7 il quozieute cercato. Scritta in quoziente la cifra trovata, e toltone dal dividendo il prodotto per 48, si avrà 36 per resto finale della divisione.

Suppongasi ora che il divisore sia di tre cifre. Fatta astrazione dalle semplici unità del dividendo e del divisore, si ricadrà evidentemente nel caso testè contemplato. Si potrà perciò operare come dianzi sulle prime cifre dei numeri dati, se non che prima di fissare il loro quoziente bisognerà assicurarsi che tra le diecine che possono avanzare da tal divisione e le unità del dividendo, si formi un numero eguale o maggiore di quello risultante dal prodotto delle unità del divisore per il quoziente ottenuto; il quale dovrà aversi per eccessivo e dovrà scemarsi di unità in unità, fintantochè questa condizione non resti adempita.

Seguitando a ragionare in tal modo per divisori di un maggior numero di cifre, si verrà a concludere generalmente; che volendo dividere l'uno per l'altro due numeri qualunque purchè il primo non giunga ad eguagliare il prodotto del secondo per 10, basterà dividere per l'unità dell'ordine più elevato, espresse dalla prima cifra del divisore, quelle dello stesso ordine che saranno espresse dalla prima cifra o dalle prime due cifre del dividendo, e diminuire il quoziente così ottenuto, se e quanto occorra, perchè ciò che resta da tal divisione, unito alla parte rimanente del dividendo e diviso per la parte rimanente del divisore, dia un quoziente o eguale o maggiore.

Avvertiremo che il resto della divisione nel caso di cui parliamo, può aversi immediatamente, trovata che sia la cifra del quoziente, moltiplicando per la cifra stessa il divisore e sottraendone dal dividendo il prodotto a misura che questo si va formando, senza che vi sia bisogno di scriverlo. Per darne un esempio, prendiamo a dividere 789 per 167. Impostata al solito

l'operazione e trovato che 4 è il quoziente, cominceremo dal moltiplicare per 4 le unità del divisore e si avranno in prodotto 28 unità. Per poterle sottrarre dal dividendo, ove non ne sono altro che 9, aggiungiamo mentalmente 20 unità, ossia due diecine, e formiamo così 29, da cui tolto 28 si ha 1 di resto, che scriveremo sotto il 9. Passando ora a moltiplicare per 4 le diecine del divisore, ne avremo 24, alle quali ne aggiungeremo altre due, affinchè si vengano a ritogliere dal dividendo le due diecine, che si sono aggiunte per render possibile la sottrazione precedente; ne avremo quindi 26. Ma qui pure per poter togliere dal dividendo 26 diecine, dovremo aggiungere mentalmente alle 8 diecine del dividendo due centinaia, ossia 20 diecine, con che se ne faranno 28; da cui togliendone 26 se ne hanno due di resto, le quali segneremo sotto l'8. Moltiplicando infine per il quoziente le centinaia del divisore, ne risulteranno 4; alle quali aggiungeremo quelle due che precedentemente sono state aggiunte al dividendo, ondo si ridurranno a 6, che tolte da 7 ne danno una di resto da scriversi sotto il 7. Sicchè il resto totale della divisione sarà 121.

```
          4
167 / 789
      121
```

* 34. Passiamo finalmente al 3.° caso della divisione, al caso cioè che il dividendo e il divisore siano composti di un qualsivoglia numero di cifre.

Già sappiamo (31) come in questo caso si possa preventivamente arrivare a conoscere il numero delle cifre che dovranno risultare in quoziente, sicchè non ci resta a trattare che del modo di determinare il valore individuale di ognuna di esse. Perchè l'esposizione della regola risulti più chiara, ci proporremo di dividere 2878854 per 583.

Disposti come di fianco i due numeri dati, cominceremo dall'osservare che la prima delle sette cifre, delle quali si compone il dividendo, è minore della prima delle tre cifre che formano il divisore, e ne concluderemo che il quoziente dovrà risultare di quattro cifre, e che perciò la prima di esse esprimerà unità di quart'ordine ossia migliaia. Ma quante saranno precisamente queste migliaia? Nè più nè meno, si può rispondere con sicurezza, del numero che se ne ottiene dal dividere le 2878 migliaia del dividendo per il divisore 583. Non potranno infatti esser di più; perchè moltiplicando il divisore per un numero di migliaia maggiore di quello risultante dal quoziente di 2878 diviso per 583, si avrebbe manifestamente un prodotto più grande di tutto il dividendo, ciò che non deve mai succedere (29. 1.° 2.°): non potranno essere di meno; perchè allora, sottraendone dal dividendo il prodotto per 583, darebbero evidentemente un resto maggiore di 583 migliaia, un resto cioè che sarebbe più di mille volte maggiore del divisore, e lo conterrebbe perciò almeno un altro migliaio di volte, il che non può ammettersi. Per aver dunque il preciso numero delle migliaia del quoziente, basterà dividere 2878 per 583. Or questa divisione si eseguisce con la regola del 2.° caso;

```
         4938
583 / 2878854
      2332000
       546854
       524700
        22154
        17490
         4664
         4664
         0000
```

e dando 4 di quoziente, ne inferiremo che altrettante sono le migliaia richieste. Condotta una linea al di sopra del dividendo, segneremo la cifra trovata sopra la cifra delle unità di migliaia del dividendo istesso, per esprimer così senza l'aggiunta degli zeri che essa pure rappresenta migliaia semplici; e quindi, moltiplicato il divisore per 4 migliaia, ne sottrarremo il prodotto dal dividendo dato, ciò che darà 546854 di resto. Ma questo resto non essendo altro, come può facilmente comprendersi, che il prodotto del divisore per quella parte del quoziente che rimane a trovarsi, potremo riguardarlo come un nuovo dividendo, il quoziente del quale per 583 deve esser composto di centinaia, diecine e unità. Procedendo alla ricerca di queste centinaia, fermeremo la nostra attenzione sopra quelle che sono nel nuovo dividendo, e ragionando come sopra, concluderemo che le centinaia del quoziente dovranno esser tante quante se ne hanno dal dividere le 5468 centinaia del dividendo per 583, vale a dire 9. Scritta a destra del 4 segnato in quoziente la cifra così trovata, moltiplicheremo il divisore per 900, e sottrattone il prodotto da 546854, avremo il resto 22154, il quale sarà il prodotto del divisore per le diecine e unità tuttora incognite del quoziente, più il resto finale, se pure avrà luogo, della divisione. Rinnovando a questo punto il solito ragionamento, ci persuaderemo che le diecine del quoziente si troveranno dividendo per 583 le 2215 diecine del resto ultimamente ottenuto. Effettuata questa nuova divisione, e segnate a destra delle centinaia del quoziente le 3 diecine che ne risultano, per esse moltiplicheremo il divisore, e toltone da 22154 il prodotto, conseguiremo il resto 4664; il quale diviso alla sua volta per 583 ci darà le unità del quoziente. Siccome poi l'ultimo resto ottenuto contiene esattamente il divisore otto volte, segnata in quoziente la cifra 8 alla destra delle diecine, concluderemo che 2878854 diviso per 583 dà precisamente 4938.

*35. Per poco che si rifletta all'andamento del calcolo precedente, apparirà manifesto, che per determinare i valori delle cifre del quoziente, abbiamo dovuto eseguire, con la regola del 2.° caso, quattro divisioni parziali, vale a dire tante precisamente quante erano le cifre da determinarsi; e che per ognuna di queste divisioni, il divisore è costantemente lo stesso cioè il dato, mentre i dividendi sono respettivamente costituiti nel modo che segue: il primo dalle sole migliaia del numero dato a dividersi; il secondo dalle migliaia, che dà di resto la prima divisione, trasformate in centinaia e aumentate delle semplici centinaia esistenti nel dividendo dato; il terzo delle centinaia, che avanzano nella seconda divisione, ridotte a diecine e poi accresciute delle semplici diecine che sono nel dato dividendo; e il quarto infine dalle diecine, restanti dalla terza divisione, cangiate in semplici unità e aggiuntavi l'ultima cifra del dividendo. Sicchè la prima divisione parziale si limita alle migliaia ossia alle prime quattro cifre soltanto del dividendo, vale a dire a quelle che bastano per formare un numero immediatamente più grande del divisore, e le cifre rimanenti non entrano in calcolo altro che a una per volta nelle divisioni successive, cioè

la cifra delle centinaia nella seconda divisione, quella delle diecine nella terza, e quella delle unità nella quarta. Da queste semplici riflessioni che potrebbero facilmente ripetersi sopra qualunque altro esempio, e che condurrebbero visibilmente alle medesime conseguenze, siamo indotti a stabilire per il 3.° caso della divisione la seguente regola generale:

Per avere il quoziente di due numeri qualunque si separano alla sinistra del dividendo tante cifre che bastino a formare un numero immediatamente maggiore del divisore, e si costituisce di queste prime cifre un primo dividendo parziale. Eseguita sopra di esso la divisione, mediante la regola del secondo caso, si ha la prima cifra del quoziente; per essa si moltiplica il divisore, e sottrattone il prodotto dal dividendo parziale, si ottiene un primo resto. Di questo resto, dopo avere scritta, o calata *come suol dirsi, a destra di esso la cifra del dividendo dato, la quale succede immediatamente a quelle impegnate nella prima divisione, si forma un secondo dividendo parziale, che trattato precisamente come il primo, somministra la seconda cifra del quoziente cercato, più un nuovo resto. Di questo pure si costituisce un dividendo parziale scrivendogli a destra la cifra, che succede a quella precedentemente calata, e dividendolo nel solito modo, si ottiene la terza cifra del quoziente con un resto convertibile in un quarto dividendo parziale nel modo stesso dei resti precedenti. E così si prosegue finchè vi son cifre da determinarsi in quoziente, ossia finchè vi sono cifre da abbassarsi nel dividendo dato. L'ultimo resto che non può convertirsi in dividendo parziale, perchè manca la cifra da calarsi a destra di esso, esprime il resto finale della divisione.*

*36. *Osservazione* 1.ª Dandosi il caso che taluno dei dividendi parziali riesca minore del divisore, dovrà inferirsene che nel quoziente non può ottenersi nemmeno una sola unità dell'ordine corrispondente a quel dividendo parziale, del quale si verifica il caso accennato. Perciò si segnerà zero in quoziente, e abbassata una nuova cifra, si proseguirà l'operazione. Che se la cifra abbassata non bastasse a rendere il dividendo maggiore del divisore, se ne abbasseranno quante ne occorrono, segnando però altrettanti zeri in quoziente.

Oss. 2.ª Per trovare i resti parziali non è necessario scrivere sotto ai respettivi dividendi i prodotti del divisore per le cifre del quoziente. Quando si è acquistata una certa franchezza nel calcolo, riesce più pronto e più comodo il metodo che abbiamo altrove (33) insegnato.

Oss. 3.ª Se il dividendo e il divisore sono terminati da zeri, questi si sopprimeranno tutti o in parte, secondo la varietà dei casi in conformità di ciò che abbiamo stabilito al § 30. Con queste avvertenze si troverà

$$4657300 : 23000 = 202 + \frac{113}{230}.$$

37. Il principio che ci ha condotti alle regole per la divisione (29. 1.°) porge manifestamente il modo di farne la riprova. Ma ancor qui ha luogo quella del 9. Si cerchino nel solito modo (25) e si moltiplichino i resti del divisore e del quoziente, e si porti mentalmente il prodotto alla sini-

stra o alla destra del resto finale della divisione. Il resto dato dal numero così composto dovrà eguagliare quello che si avrà dal dividendo togliendo il 9 dalla somma delle sue cifre. Così nell'esempio di sopra (36. oss. 3.ª) il resto del divisore 23000 è 5, del quoziente 202 è 4, il loro prodotto 20. che unito a 113. resto della divisione, dà 20113, d'onde si ha il resto 7 come dal dividendo 4657300.

38. Una quantità che divisa per un'altra non dà resto si dice ***multipla*** di questa, cioè ***dupla, tripla*** ec. se il quoziente è 2, 3 ec., e questa si dice ***summultipla***, o ***aliquota*** della prima, cioè ***suddupla, suttripla*** ec., se entra nella prima 2 volte, 3 ec. Così 10 è duplo di 5; 18 è triplo di 6, 8 è multiplo di 4 e di 2; ogni numero è multiplo di 1. All'incontro 2 è summultiplo di tutti i numeri pari; e 5 lo è di tutti i numeri terminati in 5 oppure in zero. Ma la quantità che divisa per un'altra lascia un resto, dicesi ***prima*** a quest'altra, e ambedue si chiamano ***prime tra loro:*** così 8 e 5, 14 e 3 son primi tra loro. Si chiama poi in generale ***numero primo*** ogni numero intero non multiplo d'altro intero maggiore dell'unità. Tali sono il 2, 3, 5, 7, 11 ec.

Decomposizione dei numeri nei loro elementi. Ricerca del minimo multiplo e del massimo comun divisore.

*39. Quando un numero risulta dal prodotto di altri, e quindi è divisibile esattamente per ognuno di essi (29. 4.º), questi si chiamano i suoi ***elementi;*** e sono ***semplici*** se non ammettono verun divisore esatto, ossia se son primi; ***composti*** nel caso contrario. La ricerca degli elementi semplici e composti dei numeri è di grande importanza nell'Aritmetica, come ben presto avremo luogo di verificare, e perciò indicheremo la maniera di effettuarla.

*40. Il metodo più regolare che possa tenersi nella decomposizione di un numero in tutti i suoi elementi, consiste nel trovarne prima gli elementi semplici, cominciando dal più piccolo e procedendo gradatamente sino al più grande, e nel formare poi per mezzo di questi gli elementi composti. Se il numero da decomporsi è pari, sarà 2 il minimo dei suoi elementi: se è impari, e la somma delle sue cifre non è multipla di tre, nel qual caso, come vedremo nell'Algebra, avrebbe per minimo elemento il 3, e se non termina per 5, giacchè allora sarebbe il 5 medesimo l'elemento di cui è parola (38), uno qualunque dei numeri primi 7, 11, 13, 17, 19 ec. potrà essere il più piccolo degli elementi cercati. Converrà perciò dividere successivamente il numero dato per ognuno di questi numeri, finchè uno non se ne trovi che dia un quoziente esatto, e sarà quello il minimo elemento. Se poi avvenga di giungere coi tentativi a un divisore che oltrepassi la metà del numero dato, dovrà manifestamente concludersi che egli è primo e perciò indecomponibile. Trovato che siasi l'elemento minimo, il quoziente esatto da esso ottenuto sarà un secondo elemento, che potrà esser

composto; perciò sopra tal quoziente pure dovranno sperimentarsi i medesimi divisori, cominciando peraltro dall'elemento semplice di già trovato. Incontrandosi in un nuovo quoziente esatto, sarà questo un terzo elemento del numero dato, e anche sopra di esso bisognerà rinnovare le solite prove; e ciò finchè non si giunga ad un ultimo elemento che non possa più decomporsi. Allorchè si saranno in tal guisa ottenuti tutti gli elementi semplici, si intenderà facilmente che per aver da essi gli elementi composti, basterà combinarli in via di moltiplicazione in tutti i modi possibili (29. 5.°).

*41. Applichiamo la regola alla ricerca degli elementi di 924. Questo numero essendo pari, ha per minimo elemento il 2, e la divisione di 924 per 2 dando luogo al quoziente 462, si ottiene per una prima decomposizione $924=2\times462$. Ma anche il fattore 462 si divide esattamente per 2, e dà di quozlente 231; dimodochè risultando $462=2\times231$, avremo $924=2\times2\times231$. Il terzo di questi fattori, avendo multipla di 3 la somma 6 delle sue cifre, si divide esattamente per 3, e dando in quoziente 77, si riduce a 3×77. Posto questo valore di 231 in quello di 924, si avrà $924=2\times2\times3\times77$. Sperimentando ora sopra 77 il divisore 7, si trova che vi è contenuto 11 volte precisamente, lo che dà $77=7\times11$. Sostituiti questi due fattori invece di 77 nell'ultimo valore di 924, risulterà $924=2\times2\times3\times7\times11$; e siccome l'ultimo di questi fattori 11 non è decomponibile in altri, concluderemo che gli elementi semplici di 924 sono 2, 2, 3, 7, 11.

Per formare gli elementi composti, ripresa l'eguaglianza $924=2\times2\times3\times7\times11$, rifletteremo che, senza alterarla, potendosi sostituire a due qualunque di questi fattori, come pure a tre e a quattro, i loro respettivi prodotti, basterà moltiplicare due a due, tre a tre e quattro a quattro in tutti i modi possibili gli elementi trovati. A tale oggetto, per evitare la confusione che potrebbe incontrarsi nel fare tanti prodotti, e per render meno facile il caso di ometterne alcuno, scritti gli uni sotto gli altri gli elementi semplici, nell'ordine stesso in cui si sono trovati, e a lato dei loro quozienti, come vedesi praticato qui appresso, si moltiplicheranno tra loro i primi due. Scritto il loro prodotto di contro al secondo, si passerà a moltiplicare per il terzo elemento ognuno dei due precedenti, non meno che il risultato della loro moltiplicazione. Quindi per il quarto si moltiplicheranno tanto i primi tre come tutti i loro prodotti. Così dovrà continuarsi, finchè non si giunga all'ultimo elemento semplice, per il quale pure si moltiplicheranno gli elementi tutti che lo precedono. I prodotti che tornassero ripetuti si lasciano.

924	
462	2.
231	2. 4.
77	3. 6. 12.
11	7. 14. 21. 28. 42. 84.
1	11. 22. 33. 44. 66. 77. 132 154. 231. 308. 462. 924.

*42. La decomposizione dei numeri nei loro elementi somministra un mezzo facilissimo per ottenere tanto il minimo multiplo che il massimo comun divisore di due o più numeri dati. Il *minimo multiplo* di più numeri è quello che li contiene tutti esattamente il minor numero di volte che sia possibile. Il *massimo comun divisore* è il più gran numero per cui si possono dividere esattamente i numeri dati. Incominciamo dalla ricerca del minimo multiplo.

*43. Il prodotto che risulta dal moltiplicare insieme più numeri è senza dubbio un loro multiplo, perchè avendoli tutti per fattori si divide esattamente per ognuno di essi. Or questo stesso prodotto sarà altresì il minimo multiplo, sempre che i numeri dati sian semplici, o essendo composti non abbiano comune qualche elemento. Infatti, nemmeno un solo di detti numeri o dei loro elementi potendo mancare di comparire come fattore nel minimo multiplo, perchè in tal caso egli non sarebbe più divisibile per quello dei dati numeri a cui l'elemento mancante appartiene, non può essere a meno che eguagli il loro prodotto totale. Ma se al contrario esiste qualche fattor comune tra alcuni o tra tutti i numeri dati, il minimo multiplo risulta minore del loro prodotto; perchè per contenerli esattamente non è necessario che li abbia tutti per fattori, ma basta che tra i suoi elementi vi si trovino quelli di ciascheduno dei numeri stessi. Così per avere un multiplo di 4 e di 6 non si avrebbe che a prendere il loro prodotto 24; ma se si voglia averne il minimo multiplo, dopo avere osservato che essi hanno il 2 per fattore o elemento comune, dovrà trovarsi un numero i di cui elementi siano 2, 2, 3, il quale soddisfarà precisamente e senza esuberanza alla condizione di essere multiplo di 4 e di 6, perchè conterrà quei dati elementi che gli sono indispensabili, affinchè possa dividersi esattamente per l'uno e per l'altro dei numeri dati.

*44. Ciò premesso, la regola da praticarsi nella ricerca del minimo multiplo si presenta così facilmente, che non abbisogna nemmeno di essere enunciata. Per darne un esempio, proponiamoci di trovare il minimo multiplo dei numeri 20, 42, 70.

20	2	42	2	70	2
10	2	21	3	35	5
5	5	7	7	7	7

Decomposti questi numeri nei loro elementi semplici, osserveremo che il numero richiesto dovrà avere per suoi elementi 2, 2, 5 per essere multiplo di 20; che per esserlo anche di 42, dovrà inoltre avere gli elementi 3, 7; e che per esser multiplo ancor di 70 non abbisognerà d'altro, giacchè gli elementi di quest'ultimo numero sono compresi tra i precedenti. Quindi gli elementi 2, 2, 3, 5, 7 saran tutti quelli che deve avere il minimo multiplo richiesto, il quale perciò sarà eguale a 420. Dividendo questo numero per ognuno dei dati, si ottengono i quozienti esatti 21, 10, 6, i quali non hanno alcun elemento comune a tutti e tre; ciò che deve sempre accadere, come è facile a intendersi, quando l'operazione è ben fatta. Procediamo adesso alla ricerca del massimo comun divisore.

*45. Un numero non è multiplo di un altro se questo non è uno dei fattori

di quello, ossia se gli elementi costituenti il secondo numero non si trovano tutti compresi tra quelli del primo. Questa proposizione è resa evidente per quanto abbiam detto superiormente. Affinchè dunque due o più numeri ammettano un comun divisore, è necessario che essi abbiano degli elementi comuni, i quali soltanto ne somministreranno dei divisori esatti, sia col prenderli isolatamente, sia combinandoli tutti o in parte per via di moltiplicazione. Segue di qui che volendo il più gran divisore di più numeri, basterà decomporli nei loro elementi semplici, e formare il prodotto di tutti quelli, che si troveranno comuni a tutti i numeri dati. Operando in tal modo per i numeri 78, 195, 273, che hanno respettivamente per elementi 2. 3, 13; 3, 5, 13; 3, 7, 13, troveremo 3×13 ossia 39, che dando luogo ai quozienti 2, 5, 7, *primi tra loro*, conferma di essere il massimo comun divisore cercato.

*46. Esiste per la ricerca del massimo comun divisore un altro metodo, che giova conoscere non tanto perchè talvolta riesce più speditivo del precedente, quanto per le conseguenze delle quali è fecondo. Ad oggetto di conseguire nell'esporlo maggiore facilità, ci proporremo di avere a trovare il massimo comun divisore di 1610 e di 427, senza ometter peraltro di serbarci nel ragionamento così indipendenti dal valore particolare di questi numeri, da non lasciare alcun dubbio intorno alla generalità del metodo stesso.

È evidente che qualora il maggiore dei numeri dati si dividesse esattamente per il minore, questo sarebbe il comun divisore cercato. Tenteremo perciò la divisione di 1610 per 427. Eseguita questa divisione, si trova 3 di quoziente e 329 di resto, dal che siamo obbligati a concludere che 427 non è il numero di cui si va in cerca. Ma dal risultato di questa prima operazione può trarsi un'altra conseguenza molto utile: imperciocchè avendosi da esso (29, 1.°) l'eguaglianza $1610=427\times3+329$, con questa non sarà difficile dimostrare che il massimo comun divisore di 1610 e 427, cioè dei numeri dati, è identico a quello di 427 e 329, cioè del minore di detti numeri e del resto della loro divisione. Supponiamo infatti in primo luogo che il massimo comun divisore di 1610 e di 427 non divida esattamente anche 329; allora, siccome evidentemente il quoziente di 1610 per il supposto divisore deve eguagliare la somma dei quozienti di 427×3 e di 329 pel divisore medesimo, perchè questi due numeri equivalgono a 1610, e sì questo che quelli vengon divisi per lo stesso numero, avremo l'assurdo che il quoziente esatto di 1610, eguaglia il quoziente di 427×3 parimente esatto, perchè è il triplo di quello che si avrebbe dal dividere 427 soltanto (30), più il quoziente di 329, che per ipotesi non è esatto. Dunque il più gran divisore di 1610 e di 427 è un divisore esatto di 329. Supponiamo in secondo luogo che il massimo comune divisore di 427 e di 329 non sia un esatto divisore di 1610; si avrà in tal caso che la somma di due quozienti esatti, quali son quelli provenienti da 427×3 e da 329, eguaglia un quoziente non esatto, quale è, secondo la nostra supposizione, quello di 1610, ciò che è parimente assurdo; dunque il più gran divisore di 427 e di 329 è anche divisore di 1610. Sicchè il mas-

simo comun divisore del primo e secondo o del secondo e terzo dei tre numeri 1610, 427 e 329 divide necessariamente anche l' altro. Ma essendo manifesto che ciò non potrebbe verificarsi, se il più gran divisore di 1610 e di 427 superasse il più gran divisore di 427 e di 329, o se viceversa questo fosse maggiore di quello, ne viene che essi debbono essere eguali. Dunque per avere il massimo comun divisore di 1610 e 427, basta trovare quello di 427 e 329. Tentando a quest' effetto, per la ragione detta di sopra, la divisione di 427 per 329, risultano il quoziente 1 e il resto 98, dal che si deduce che 329 non è il più gran divisore cercato. Stabilita peraltro la nuova eguaglianza che ne deriva, cioè $427=329\times1+98$, e rinnovato su questa il precedente ragionamento, verrà a provarsi che il massimo comun divisore di 427 e 329 è identico a quello di 329 e 98. Divideremo adunque l'uno per l'altro questi due numeri, e trovandosi che qui pure ha luogo un resto, dedotte dall' eguaglianza $329=98\times3+35$ risultante da tal divisione le solite conseguenze, passeremo a cercare il più gran divisore di 98 e 35. Questi numeri trattati come i precedenti, danno l' eguaglianza $98=35\times2+28$, dalla quale siamo indotti a cercare il massimo comun divisore sopra 35 e 28, che alla lor volta somministrano $35=28\times1+7$; da cui si deduce che la ricerca del più gran divisore è ora ridotta a quello di 28 e 7. Dividendo finalmente 28 per 7, si trova un quoziente esatto, onde 7 è il massimo comun divisore di 7 e 28, e in conseguenza di 28 e 35, di 35 e 98, di 98 e 329, di 329 e 427, e infine di 427 e 1610, cioè dei numeri dati.

*47. Il ragionamento impiegato nell' esempio precedente potrebbe applicarsi visibilmente a due altri numeri qualunque, e porta a stabilire questa regola generale, *Per aver il più gran divisore di due numeri, si comincia dal dividere il maggiore di essi per il minore; quindi si divide il minore per il resto della prima divisione, cioè per il primo resto; si divide in seguito il primo resto per il secondo, il secondo per il terzo, e così di seguito, finchè non si trova un resto finale che sia contenuto esattamente in quello che lo precede, ossia finchè non si trova un resto eguale a zero. Il resto precedente lo zero sarà il massimo comun divisore cercato.*

In pratica poi tornerà comodo disporre l' operazione nel modo che di contro vedesi usato per i numeri 604, 123. Sotto al maggiore di questi numeri è scritto il minore, e sotto di esso seguono per ordine i resti che successivamente si ottengono dalla divisione del più gran numero per il minore, del minore per il primo resto, del primo resto per il secondo e così di seguito. Al di là di una linea condotta verticalmente sulla destra di tutti questi numeri, si veggono segnati i quozienti a lato dei respettivi divisori dai quali derivano. In questo esempio il resto che precede lo zero è 1, il che sta ad indicare che oltre l'unità i numeri 604 e 123 non hanno alcun divisore comune.

604	
123	4
112	1
11	10
2	5
1	2
0	

*48. Se i numeri dei quali devesi trovare il più gran divisore comune son più di due, prima si cercherà quello di due qualunque di essi, poi si cercherà il massimo divisore di quello trovato e di un altro dei numeri dati, e così di

seguito. Ripresi per esempio i numeri 78, 195, 273, tra i quali abbiamo trovato col primo metodo il massimo comun divisore 39 (45), troveremo che i primi due hanno per più gran divisor comune 39 che, dividendo esattamente il terzo numero 273, sarà il numero cercato. La giustezza di questo procedere, dopo tuttociò che è stato detto fin qui, non ha bisogno di esser dimostrata. Resterebbero a farsi alcune osservazioni importanti, ma sarà più opportuno differirle all' Algebra, ove questo tema verrà nuovamente e più ampiamente trattato.

Natura dei rotti e loro proprietà.

*49. L'unità numerica non essendo semplice (1), può sempre concepirsi divisa in un numero più o meno grande di parti eguali. La riunione di alcune di queste parti costituisce ciò che si chiama *rotto* o *frazione*. Perchè il valore di un rotto sia perfettamente determinato, è manifesto che bisogna conoscere in quante parti l'unità è stata divisa, e quante son quelle che concorrono alla formazione del rotto; e quindi per esprimerlo sono necessari due *termini*, uno dei quali chiamasi *numeratore*, perchè conta o numera le parti dell'unità che sono state raccolte per la formazione del rotto, e l'altro, *denominatore*, perchè denomina la specie delle parti in cui è stata decomposta l'unità medesima. In iscritto poi esprimesi un rotto ponendo il denominatore sotto il numeratore, e separando l'uno dall'altro con una linea. Così $\frac{7}{9}$, che si pronunzia *sette noni*, esprime un rotto che ha per numeratore 7 e per denominatore 9, e indica che si sono raccolte sette delle nove parti in cui un'unità è stata divisa.

*50. Talvolta non una ma più unità si decompongono in parti eguali, e di queste se ne riuniscono tante da eguagliare o eccedere quelle che basterebbero a ricomporre una o più unità; in tal caso si ha una quantità *frazionaria* che appelleremo *rotto apparente* se le parti riunite formano un numero esatto di unità, *rotto improprio* nel caso contrario.

Ogni rotto apparente ha il numeratore eguale o multiplo del denominatore, e vale tante unità o *interi* quante ne risultano dalla divisione del primo per il secondo di questi due termini. Così $\frac{4}{4}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{18}{6}$ equivalgono respettivamente a 1, 2, 3 unità; essendo manifesto che in un rotto apparente si ha un'unità per ogni volta che il suo numeratore eguaglia o contiene il denominatore, e quindi in tutto si hanno tante unità quante volte il primo di questi termini eguaglia o contiene il secondo.

Ogni rotto improprio ha il numeratore più grande ma non multiplo del denominatore, ed equivale al quoziente completo dell'uno per l'altro: $\frac{100}{13}$ per esempio è lo stesso che 100 diviso per 13. Infatti $\frac{100}{13}$ essendo la tredicesima

parte dell'unità presa 100 volte, esprime una quantità 13 volte più piccola di 100 unità, quale appunto deve essere quella risultante dalla divisione di 100 per 13, affinchè moltiplicando per essa il divisore 13 possa riprodursi il dividendo 100. Questo ragionamento, che potrebbe ripetersi senza difficoltà sopra qualunque altro esempio, giustifica l'uso di chiamare quozienti i rotti di questa specie, uso che poi si è esteso ad ogni altra specie di rotti.

51. *Di due rotti con lo stesso numeratore, quello che ha un minor denominatore è più grande*, perchè contiene parti dell'intero in egual numero, ma tutte maggiori: così $\frac{1}{2}$ è maggiore di $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$ sono maggiori di $\frac{2}{5}$: *con lo stesso denominatore, quello è più grande che ha un maggior numeratore*, perchè contiene un maggior numero di parti, tutte eguali in grandezza a quelle contenute nell'altro: così $\frac{2}{3}$ son maggiori di $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}$ maggiori di $\frac{2}{8}$. Quindi moltiplicando o comunque aumentando il numeratore di un rotto, questo crescerà sempre di valore: dividendolo, o comunque diminuendolo, il valore scemerà: ed avverrà l'opposto se le stesse operazioni si facciano sul denominatore.

52. Ma se tanto il numeratore che il denominatore si moltiplicheranno o si divideranno per una medesima quantità, l'effetto dell'operazione fatta sull'uno di questi due termini sarà distrutto dal contrario effetto di quella fatta sull'altro, ed il valor del rotto rimarrà sempre lo stesso. Così moltiplicando per 2 il numeratore del rotto $\frac{2}{7}$, ho $\frac{4}{7}$ doppio di $\frac{2}{7}$, ma se moltiplicherò per 2 ancora il denominatore 7, avrò $\frac{4}{14}$, che essendo metà di $\frac{4}{7}$, perchè con egual numeratore ha doppio denominatore, ritorna per conseguenza eguale al rotto $\frac{2}{7}$.

53. Concluderemo adunque che il valor di un rotto non si altera mai dividendone o moltiplicandone ambedue i termini per una stessa quantità; e perciò *vi è un'infinità di rotti dello stesso valore, benchè espressi in termini differenti*. Così $\frac{36}{72}=\frac{18}{36}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, ove i due termini del primo son divisi per 2, quei del secondo per 3, e quei del terzo per 6, che han dato il rotto $\frac{1}{2}$, visibilmente eguale ai precedenti.

Operazioni preliminari sui Rotti.

54. *Trasformar gl'interi in rotti.* Si riduce un intero alla forma di rotto col dargli 1 per denominatore, come $6=\frac{6}{1}$; $8=\frac{8}{1}$ ec. Che se poi piaccia dare al nuovo rotto un determinato denominatore, come per esempio

7, si moltiplicheranno per 7 sì l'intero che l'unità sottoposta. Così $6=\frac{6}{1}=\frac{6\cdot 7}{1\cdot 7}=\frac{42}{7}$ (52).

55. *Ridurre più rotti allo stesso denominatore.* Moltiplico i termini di ciascun rotto pel prodotto dei denominatori di tutti gli altri, e i nuovi rotti hanno il valor di prima e un denominatore comune (52). Così per ridurre $\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{4}$ moltiplico per 4 tutto il rotto $\frac{1}{5}$, e per 5 tutto il rotto $\frac{3}{4}$, ed ho $\frac{4}{20}$ e $\frac{15}{20}$. Egualmente per ridurre $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{2}{3}$, si moltiplicheranno per $3\times 9=27$ i termini del 1.° rotto, per $3\times 6=18$ quelli del 2.°, per $6\times 9=54$ quelli del 3.°, e si avranno i rotti $\frac{135}{162}$, $\frac{126}{162}$, $\frac{108}{162}$. Ma qui poteva osservarsi che i denominatori son tutti summultipli (38) del 18. In tal caso basterà moltiplicare ciascun rotto pel quoziente che si ha dal divider 18 per il respettivo denominatore, con che i tre rotti diverranno $\frac{15}{18}$, $\frac{14}{18}$, $\frac{12}{18}$ tutti con uno stesso denominatore (29. 4.°).

*56. Questo secondo metodo preferibile all'altro, perchè men faticoso e perchè conducente a più semplici risultati, non è generale e non può praticarsi fuorchè quando i denominatori dei rotti che debbon ridursi al medesimo denominatore, hanno dei fattori comuni. Verificandosi questo caso, e non presentandosi a colpo d'occhio il minimo multiplo di tutti i denominatori, si potrà trovarlo con la regola che abbiamo stabilita (44). Giuverà anzi operare nel modo che qui sotto vedesi praticato.

$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{24}$
2. 3	2. 2. 2	2. 2. 3	3. 5	2. 3. 5	2. 2. 2. 3
2. 2. 5	3. 5	2. 5	2. 2. 2	2. 2	5
$\frac{100}{120}$	$\frac{45}{120}$	$\frac{70}{120}$	$\frac{16}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{25}{120}$

Scritti in una medesima linea orizzontale e sotto ad ognuno dei denominatori gli elementi semplici che lo compongono, si introducono tra gli elementi di ciascun denominatore quelli che esso non ha comuni con gli altri, segnandoli in una seconda linea per non confonderli coi precedenti, e quindi si moltiplicano i termini di ciascun rotto per gli elementi, o meglio per il prodotto degli elementi che si sono introdotti tra quelli del suo denominatore. Nel nostro esempio i termini del primo rotto sono da moltiplicarsi per $2\times 2\times 5$ ossia per 20, quelli del secondo per 3×5 ossia per 15, quelli del terzo per 10, quelli del quarto, quinto e sesto, per 8, per 4 e per 5; ciò che dà i sopra espressi risultati.

Qui osserveremo passando, che ridotti o con l'un metodo o con l'altro i rotti dati al medesimo denominatore, può subito giudicarsi qual sia di tutti

il più grande o il più piccolo (51). Se i rotti sieno per altro due soli, più speditamente gli confronteremo, riflettendo dover essere manifestamente più grande quello il cui numeratore moltiplicato per il denominatore dell'altro ha dato un prodotto maggiore. Così $\frac{3}{7}$ è maggiore di $\frac{2}{5}$ perchè 3×5 dà più di 2×7.

57. *Ridurre un rotto alla più semplice espressione.* Moltiplicando i due termini d'un rotto per una medesima quantità, il rotto conserverà il suo valore (52), ma diverrà più composto, comecchè formato di numeri maggiori. All'opposto *schisandolo* o dividendolo per uno o più fattori comuni all'un termine e all'altro, diverrà più semplice, comecchè espresso da numeri minori. Acquisterà poi il grado massimo di semplicità, se ne divideremo i due termini per il prodotto di tutti i fattori comuni ad ambedue, o per il loro *massimo comun divisore.* Quando questo non si affacci da sè medesimo, dovremo ricorrere all'uno o all'altro dei due metodi esposti superiormente (45. 46. 47). Così troveremo $\frac{182}{294}=\frac{13}{21}$; $\frac{427}{1610}=\frac{61}{230}$.

Addizione dei rotti.

58. Se i rotti da sommarsi hanno uno stesso denominatore, *sommo i numeratori, e sotto la somma pongo il denominator comune;* diversamente *li riduco al medesimo denominatore* (55), *e quindi opero come sopra.* Dunque $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$; di che niuna cosa può esser più manifesta. Del pari $\frac{4}{5}+\frac{1}{4}+\frac{7}{10}=$ (56) $\frac{16}{20}+\frac{5}{20}+\frac{14}{20}=\frac{16+5+14}{20}=\frac{35}{20}=$ (52) $\frac{7}{4}$.

59. Se coi rotti vi sono anche interi, trasformo questi in rotti apparenti, dando, o sottintendendo data ad essi per denominatore l'unità (54). Così $3+\frac{5}{2}+\frac{4}{5}=\frac{3}{1}+\frac{5}{2}+\frac{4}{5}=\frac{30+25+8}{10}=\frac{63}{10}$. Ma se sia un solo il rotto da sommarsi con un intero, moltiplicherò immediatamente l'intero per il denominatore del rotto; sommerò il prodotto col numeratore, e sotto la somma segnerò il denominatore. Così $6+\frac{3}{7}=\frac{42+3}{7}=\frac{45}{7}$; la ragione ne è chiara.

Sottrazione dei rotti.

60. Nella sottrazione dei rotti si opera come nella somma, se non che, dopo aver ridotti i due rotti al medesimo denominatore, in luogo di prender la somma dei numeratori, se ne prende la differenza, avvertendo di apporre in ultimo il segno negativo (16, II.ª), nel caso che il numeratore ridotto del

diminuendo risulti più piccolo di quello del diminutore. Così $\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{15-4}{20}=\frac{11}{20}$; $\frac{3}{7}-\frac{1}{2}=\frac{6-7}{14}=-\frac{1}{14}$; $6-\frac{3}{2}=\frac{12-3}{2}=\frac{9}{2}$; $\frac{4}{5}-2=\frac{4-10}{5}=-\frac{6}{5}$.

61. Spesso avviene d'incontrare una riunione di rotti positivi e negativi, come la seguente: $\frac{5}{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{12}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$. In tal caso si ridurranno tutti al medesimo denominatore, apponendo a ciascun numeratore ridotto il segno del rotto primitivo; si sommeranno partitamente tutti i numeratori col segno $+$, quindi quelli col segno $-$; e sotto la differenza delle due somme si segnerà il denominatore comune. Così avremo:

$$\frac{5}{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{12}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=(56)\ \frac{20-18+1+9-10}{12}=\frac{30-28}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

Moltiplicazione dei rotti.

62. Moltiplicare un rotto, come per esempio $\frac{5}{7}$, per un intero, come sarebbe 6, significa prender la somma di sei rotti tutti eguali a $\frac{5}{7}$ (17); il che si fa sommando i sei numeratori eguali, ossia moltiplicando per sei il numeratore 5. Avremo dunque $\frac{5}{7}\times 6=\frac{5\cdot 6}{7}=\frac{30}{7}$.

63. Ma quando si tratti di moltiplicare un intero per un rotto proprio, il vocabolo *moltiplicare* cangia alquanto il suo significato primitivo; poichè non è allora il moltiplicando, che si vuol prender più volte, ma porzioni soltanto del medesimo, indicate dal denominatore della frazione, che debbon prendersi tante volte, quante unità sono nel numeratore. Così quando dico moltiplicare 5 per $\frac{3}{4}$, non altro intendo che dividere il 5 in quattro parti, e di queste prenderne tre. Or ciascuna delle quattro parti in cui resta diviso il 5, è visibilmente espressa da $\frac{5}{4}$; adunque per averne 3, dovrò moltiplicare $\frac{5}{4}$ per 3, e quindi avrò $\frac{5}{4}\times 3=$ (62) $\frac{5\cdot 3}{4}=\frac{15}{4}$; e poichè lo stesso avrei avuto moltiplicando $\frac{3}{4}$ per 5 (22. 6.°), comecchè l'operazione è precisamente la medesima nell'un caso e nell'altro, potrò dunque stabilire in generale, che *si moltiplicano fra loro un rotto ed un intero, prendendo il prodotto dell'intero per il numeratore del rotto, e ponendovi sotto il denominatore.*

64. Se poi per $\frac{3}{4}$ dovesse moltiplicarsi non più 5, ma $\frac{5}{9}$, ossia se dovessero prendersi tre quarte parti non del 5, ma di $\frac{5}{9}$, nona parte del 5, è visibile che anche il valore ottenuto verrebbe a ridursi alla sua nona parte;

il che si fa moltiplicando per 9 il denominatore (50). Dunque $\frac{5}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{5.3}{4.9}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$; e siccome lo stesso si avrebbe dal moltiplicare $\frac{3}{4}$ per $\frac{5}{9}$; dunque in generale *si moltiplicano due rotti, prendendo il prodotto dei numeratori, e dividendolo per quello dei denominatori.*

65. Si osservi che *quando il moltiplicatore è rotto proprio, il prodotto è sempre più piccolo del moltiplicando.* Infatti se si moltiplica $\frac{5}{9}$ per 1, cioè se si prende una sola volta, si ha $\frac{5}{9}$; se dunque si moltiplica per $\frac{3}{4}$ minore di 1, e in conseguenza non si prende totalmente neppur una volta, deve aversi meno di $\frac{5}{9}$. Se poi ambedue i fattori son rotti proprj, è evidente che il prodotto sarà minore dell' uno e dell' altro.

66. Se debban moltiplicarsi più rotti, si farà il prodotto di tutti i numeratori, e si dividerà per quello di tutti i denominatori. Qualora per altro qualche numeratore possa ridursi con qualche denominatore (57), benchè spettante a rotto diverso, gioverà far la riduzione prima di moltiplicare, avvertendo di sostituir l'unità in luogo di quei numeratori o denominatori, che per effetto di questa riduzione venissero ad esser elisi completamente. Così avendosi $\frac{2}{9}\times\frac{39}{28}\times\frac{7}{6}\times\frac{11}{5}$, si ridurrà ad $\frac{1}{3}\times\frac{13}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{11}{5}=\frac{143}{180}$. Se fra i fattori vi sia qualche intero, si renderà più uniforme il calcolo dandogli per denominatore l'unità (54).

Divisione dei rotti.

67. Dividere un rotto qualunque, come per es. $\frac{7}{15}$ per un intero 6, significa prenderne la sesta parte, il che si ottiene (64) moltiplicandolo per $\frac{1}{6}$, o semplicemente moltiplicando per 6 il denominatore 15. Ma se debba dividersi per $\frac{6}{11}$, quantità 11 volte minore di 6, il quoziente avuto dovrà allora divenire 11 volte più grande, e perciò converrà moltiplicarne per 11 il numeratore. Dunque $\frac{7}{15}:\frac{6}{11}=\frac{7.11}{15.6}=\frac{77}{90}$; d'onde in generale *si divide un rotto per un altro, moltiplicando in croce il numeratore del dividendo per il denominatore del divisore, e il numeratore del divisore per il denominatore del dividendo, e ponendo sotto il primo prodotto il secondo.*

68. Si osservi I.° che a questa stessa regola si riducono quelle per il caso di un rotto da dividersi per un intero, o di un intero da dividersi per un rotto: per la qual cosa basterà trasformare in un rotto l'intero (54), comun-

que sia questo o divisore, o dividendo. Così $\frac{3}{7} : 5 = \frac{3}{7} : \frac{5}{1} = \frac{3}{35}$; $8 : \frac{4}{9} = \frac{8}{1} : \frac{4}{9} = \frac{72}{4} = 18$. Se non che siccome la moltiplicazione per l'unità lascia intatto il numeratore primitivo del rotto dividendo nel primo caso e il numeratore del rotto divisore nel secondo, potremo per questi due casi ridurre l'enunciato della regola ai due seguenti: *si divide un rotto per un intero dividendone il numeratore per il prodotto dell' intero nel denominatore; e si divide un intero per un rotto moltiplicando l' intero per il denominatore del rotto e dividendo il prodotto per il numeratore.*

II.° In forza della regola generale (67) si avrebbe $\frac{7}{6} : \frac{15}{11} = \frac{7}{6} \times \frac{11}{15} = \frac{77}{90} =$ (*ivi*) $\frac{7}{15} : \frac{6}{11}$; perciò *il quoziente di due rotti si ha pure dividendo il quoziente dei due numeratori per quello dei due denominatori*, cioè formando un rotto coi due numeratori, un altro coi denominatori, e dividendo quello per questo nel modo che apparisce dal calcolo precedente.

III.° *Ogniqualvolta il rotto divisore sia proprio il quoziente sarà più grande del dividendo:* infatti il quoziente cresce a misura che scema il divisore. Or se si divide per l' unità, il quoziente eguaglia visibilmente il dividendo: dovrà dunque superarlo, se si divide per un rotto minore dell' unità.

69. Per indicar la divisione di un rotto per un altro, come $\frac{3}{4}$ per $\frac{8}{9}$, si usa più ordinariamente il modo che abbiamo praticato, cioè $\frac{3}{4} : \frac{8}{9}$; ma talvolta giova di scriver piuttosto $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{9}}$, sottoponendo al rotto dividendo il rotto divisore, e avendo cura di dar più lunghezza alla linea che separa i due rotti, che a quelle che separano i due numeratori dai loro respettivi denominatori. In egual modo si scrive $\dfrac{3}{\frac{5}{8}}$, $\dfrac{\frac{5}{7}}{4}$ per denotare che vuolsi dividere o l' intero 3 per il rotto $\frac{5}{8}$, o il rotto $\frac{5}{7}$ per l' intero 4. In tali casi si terranno per dividere le pratiche seguenti. Nel primo si moltiplicheranno i due estremi 3, 9, e quindi i due medj 4, 8; e col primo prodotto si formerà il numeratore del quoziente, col secondo il denominatore. Nel secondo si moltiplicheranno i due estremi 3, 8, e si dividerà il prodotto per il medio 5. Nel terzo si moltiplicheranno i due inferiori 7, 4, e per il loro prodotto si dividerà il superiore 5. L' analogia di queste regole pratiche con le precedenti è manifesta.

Frazioni o Rotti Decimali.

70. La legge medesima di convenzione, la quale stabilì che la prima cifra a sinistra delle unità rappresenti diecine, la precedente centinaia, l'altra migliaia (5), prescrisse egualmente che contrassegnata la suddetta cifra dell'unità con una virgola posta dopo di essa, una prima cifra dopo la virgola esprimesse *decime* parti d'unità, una seguente parti *centesime*, la successiva parti *millesime* ec. Così mentre il numero 486,597 equivale nella parte che precede la virgola a 400+80+6, in quella che segue corrisponde a $\frac{5}{10}+\frac{9}{100}+\frac{7}{1000}$: e siccome queste tre frazioni ridotte al comun denominatore 1000 (55) e sommate danno $\frac{597}{1000}$, perciò il suddetto numero 486,597 varrà 486 interi ossia unità, e 597 millesimi.

71. Anzi poichè $486+\frac{597}{1000}=$ (59) $\frac{486597}{1000}$; dunque il numero 486,597 potrà leggersi andantemente per 486 mila 597 millesimi. Nell'istessa guisa 6,28 si leggerà 6 interi e 28 centesimi, oppure 628 centesimi. Ma 0,82 e 0,013 non varranno che 82 centesimi il primo, e 13 millesimi il secondo, perchè lo zero che precede la virgola mostra qui che la parte frazionaria non è congiunta ad alcun intero.

72. Queste espressioni son dunque veri rotti, o improprj, o proprj (49), secondo che avanti la virgola hanno o cifre significative o lo zero. Se non che il loro denominatore è sottinteso ed equivale all'unità seguita da tanti zeri quante son cifre dopo la virgola; di qui il nome che hanno assunto di *decimali*, che per altro più specialmente si appropria alla porzione che viene dopo la virgola. La loro comoda forma e la facilità con la quale perciò si maneggiano, unite ad altre loro proprietà sommamente utili, gli fanno preferire ai rotti ordinarj, i quali col metodo che insegneremo (84) assai facilmente si cangiano in decimali. Frattanto ecco alcune tra le belle proprietà di questi ultimi.

73. I.ª Due o più rotti decimali, che abbiano un egual numero di cifre dopo la virgola, hanno altresì lo stesso denominatore. Ciò è manifesto dopo quanto abbiamo detto intorno al denominatore sottinteso (72).

74. II.ª Come $\frac{6}{10}=\frac{60}{100}=\frac{600}{1000}$ ec. (52), così sarà 0,6=0,60=0,600 ec. cioè l'aggiunta o la soppressione finale d'uno o più zeri alla destra niente altera il valore di un decimale.

75. III.ª Perciò dati due o più decimali di diverso numero di cifre, ed in conseguenza di diverso denominatore (72), col solo aggiungere in fine tanti zeri da rendere in tutti eguale il numero delle cifre alla destra della virgola, verranno ridotti allo stesso denominatore.

76. IV.ª Di due o più rotti decimali quello è maggiore che ha prima

dell'altro di seguito alla virgola cifra maggiore. Infatti riducendoli tutti col metodo precedente allo stesso denominatore, quello che ha in principio cifra maggiore, avrà altresì visibilmente un maggior numeratore.

77. V.ª Se in un rotto decimale si sopprimano l'ultime cifre, l'errore sarà tanto più piccolo quanto è maggiore il numero delle decimali che restano. Così se il rotto 3,142683925 si riduca a 3,1426839 oppure a 3,14268392, l'errore non sarà nel primo caso che di 25 mille milionesimi, e nel secondo di soli 5 mille milionesimi. Sono per altro sì piccoli ambedue questi errori, che negli usi ordinarj della società, come ancora delle scienze, non possono avere alcuna sensibile influenza, qualora il caso non porti a doverli moltiplicare per numeri grandi d'interi. Anzi il più delle volte tutto ciò che rimane al di là della quinta decimale e anche talora della quarta e fin della terza, si rende affatto superfluo; e perciò

78. VI.ª Se un decimale abbia un gran numero di cifre, potremo ordinariamente sopprimere tutte quelle che si trovano al di là della settima, e all'occorrenza quelle pure che sono al di là della quinta, della quarta ec. senza commettere il più delle volte errore da valutarsi. Qualora la prima delle cifre soppresse sia un 5, ovvero più di 5, potremo diminuir l'errore aumentando di un' unità l'ultima delle ritenute. Così dovendo sopprimere le due ultime cifre del rotto 0,8368 sarà error minore scrivere 0,84 che 0,83. Infatti 0,84=0,8400 e 0,83=0,8300: dunque il rotto dato differisce da 0,84 di 0,0032; da 0,83 di 0,0068, cioè meno nel primo caso che nel secondo.

*79. VII.ª Un rotto decimale si moltiplica per 10, 100, 1000 ec. portando indietro la virgola di 1, 2, 3 ec. posti; perchè operando in tal modo tutte le sue cifre vengono inoltrate da destra a sinistra di altrettanti posti e acquistano quindi un valore relativo 10, 100, 1000 ec. volte maggiore. Per l'opposta ragione, volendo dividere un numero o un decimale per l'unità seguita da uno o più zeri, basterà separare sulla sua destra, mediante una virgola, tante cifre quanti sono gli zeri al seguito dell'unità se il numero è intero; e se è decimale, si avanzerà di altrettanti posti la virgola da destra a sinistra aggiungendo sul principio del decimale gli zeri che potessero occorrere. Così troveremo 627 : 100=6,27; 4,639 : 1000=0,004639.

Somma, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione dei Rotti Decimali.

80. Per sommare o sottrarre i decimali si pareggi con tanti zeri il numero delle respettive loro cifre (74. 75); quindi si dispongano, e si operi secondo il solito (12), come si vede praticato negli esempj di fianco.

	4852,79100		
	4,00745		6,00435
	0,00490		0,17000
Som.	4856,80335	Diff.	5,83435

L'aggiunta degli zeri potrà farsi ancor mentalmente; ma in tal caso

dovremo aver riguardo di disporre i numeri l' uno sotto l'altro in maniera, che le unità degli interi, o gli zeri che le rappresentano (75), corrispondano in una stessa colonna, o le virgole sotto le virgole, il che torna lo stesso.

81. Quanto alla moltiplicazione dei decimali, ben si sa che riducendogli in forma di rotti ordinarj (72), il loro prodotto si avrebbe dal divider quello dei numeratori, ossia del due fattori proposti considerati senza la virgola (72), per il prodotto dei denominatori, cioè per l'unità seguita da tanti zeri quante son cifre decimali nei due fattori. Di qui la regola: che *nella moltiplicazione deve operarsi al solito non curando la virgola; ma quanti decimali sono nei fattori, tante cifre a destra si separano nel prodotto*, e se non sieno abbastanza, si supplisce a sinistra con altrettanti zeri, come nel quarto dei seguenti esempi. La riprova si fa al solito.

43,7×13	2,4542×0,053	4,12×3,7	21,32×0,00103
1311	73626	2884	6396
437	122710	1236	2132
568,1	0,1300726	15,244	0,0219596

82. Se i fattori hanno molti decimali e non bisogni un risultamento esatto, come se dovendo moltiplicare 45,625957 per 128,635, mi basti un prodotto con 3 decimali, mi propongo primieramente di trovarne 5, cioè due di più del bisogno, per la ragione che in breve dirò; poi rovescio l'ordine del fattore che ho scelto per moltiplicatore, e lo scrivo sotto l'altro facendo corrisponder la cifra delle sue unità sotto il quinto decimale; e poichè l'ultima cifra 1 del fattore rovesciato sporgerebbe al di fuori dell'ultima decimale dell'altro, aggiungo alla destra di questo uno zero per pareggiare. Quindi moltiplico e trascuro nel moltiplicando tutte le cifre a destra di quella per cui moltiplico; e a misura che muto cifra nel moltiplicatore, scrivo la prima del nuovo prodotto sotto la prima del passato. Fatta la somma di questi prodotti, sopprimo le due ultime cifre aumentando d'un'unità l'ultima che resta, perchè le due soppresse passan 50: dopo ciò, separo i decimali che mi proposi d'avere, e trovo 5869,095 prodotto cercato.

```
45,6259570
    536821
----------
 456259570
  91251914
  36500760
   2737554
    136875
     22810
----------
 586909483
```

Infatti i prodotti che volta per volta in questo metodo si tralasciano sono evidentemente quelli che avrebbero luogo al di là dell'ultima colonna che si ritiene; tutto è dunque provato se si dimostra che questa colonna corrisponde nel prodotto alla classe decimale che ci abbisogna.

Ora è chiaro che la colonna la quale nella moltiplicazione corrisponde ad una classe decimale qualunque, per esempio alla 5.ª, deve necessariamente formarsi dal prodotto della 5.ª decimale del moltiplicando nell'unità degli interi del moltiplicatore, della 6.ª nelle diecine, della 7.ª nella centinaia ec.; come pure della quarta nei decimi, della terza nei centesimi ec.; e come il metodo dato porta appunto a moltiplicazioni fatte totalmente su questo sistema, è dunque chiaro che l'ultima decimale del prodotto, ottenuta così, è

la richiesta. E poichè i prodotti che si trascurano potrebbero render difettosa la colonna ultima che si ritiene, quindi per cautela si procura che questa colonna sia superiore anche di due classi a quella che realmente occorrerebbe.

Se nel moltiplicando non fossero tanti decimali quanti dalla regola son prescritti, si supplirebbe con zeri. Si avverta che il metodo però non ha luogo in due casi assai rari: 1.° se gl' interi uniti ai decimali son numeri molto grandi: 2.° se i decimali son molti ed espressi con le cifre massime 8, 9.

83. Infine il quoziente di due decimali deve aversi come quello degli altri rotti, con dividere il quoziente dei numeratori per quello dei denominatori (68. II.°). Ma quest' ultimo è sempre eguale all' unità seguita da tanti zeri quante son meno le cifre decimali del divisore di quelle del dividendo; perciò la divisione dei decimali si farà al solito, con divider l' uno per l' altro, senza considerare per allora la virgola, e quindi con separare a destra tante cifre decimali in quoziente quante ne ha il dividendo più del divisore. Esempj:

	3		0,135		2,44
	6,9345		92,374		49,10000
2,3115 /		682 / 2417		20,074 / 89520	
			3714		92240
			304		11944

84. Se i decimali del dividendo sieno minori in numero di quelli del divisore, si renderanno quanto più piacerà maggiori con la solita aggiunta degli zeri (74), come si vede praticato nel 3.° esempio. E potremo aggiunger nuovi zeri anche, allorquando compita la divisione, siamo giunti all' ultimo resto. È evidente che questa pratica semplicissima dà luogo ad estendere le decimali del quoziente fino a quel termine, ove le susseguenti diverrebbero trascurabili (77). In tal caso non sarà necessario tener conto, secondo la prescritta regola (28), del resto finale, e la forma del quoziente, rigorosa quanto basta, diverrà più semplice della consueta.

85. Con questo mezzo potremo comodamente ridurre a decimale un qualunque rotto ordinario per es. $\frac{5}{173}$. Cangio primieramente il numeratore 5 in 5,00 in modo che, non curata la virgola, risulti maggiore del denominatore. Comincio quindi la divisione (83), ed ho il quoziente 2 col resto 154; e come il divisore non ha decimali e ne ha due il dividendo, concludo che altrettanti deve fin qui averne il quoziente, che per conseguenza dovrà cangiarsi in 0,02 (ivi). Dopo ciò aggiungo un nuovo zero al dividendo, oppure soltanto al resto, il che tornerà ancora più comodo; quindi divido al solito, aggiungo egualmente uno zero al nuovo resto ottenuto, e di nuovo divido, e così continuando per sei volte, ottengo il quoziente 0,0289017, che è inutile protrarre, qualora 7 decimali si reputino sufficienti (77). Prima però di sospendere è necessario assicurarsi, se la cifra

che ne seguirebbe in quoziente eguagli 5 o lo superi, nel qual caso l'ultima delle ottenute, cioè il 7, dovrebbe aumentarsi di un'unità (78). Or ciò si conosce o proseguendo la divisione o riflettendo che la nuova cifra non può passare il 5, se l'ultimo resto non superi la metà del divisore: il che non avendo luogo nel caso nostro, dunque neppur l'aumento avrà luogo.

86. Può bene spesso accadere che qualche resto aumentato dello zero divenga multiplo del divisore. In tal caso il nuovo resto sarà nullo, e l'operazione avrà termine prima che il quoziente arrivi alla prescritta decimale. Se ne vedano esempj nei rotti $\frac{1}{2}=0{,}5$; $\frac{18}{25}=0{,}72$; $\frac{5}{8}=0{,}625$. I quozienti che godono di questa proprietà si chiamano *decimali esatti*, perchè equivalgono esattamente al rotto ordinario, dal quale son derivati. Negli altri che non ne godono ha luogo un'altra singolarità, il ritorno cioè periodico delle medesime cifre, che accade ogni qualunque volta s'incontri un qualche resto eguale ad alcuno dei già trovati. Ciò può succedere anche fin dal principio dell'operazione, come nei rotti

$$\frac{1}{3}=0{,}333 \text{ ec.};\ \frac{4}{11}=0{,}363636 \text{ ec.};\ \frac{1}{55}=0{,}0181818 \text{ ec.};$$

ed è poi certo che vi si giunge infallibilmente prima che il numero dei resti eguagli il divisore. Se ne troverà facilmente il perchè, se si rifletta che i resti son di lor natura tutti più piccoli del divisore (28). I quozienti di questo genere si chiamano *periodici*, nè possono mai rappresentare esattamente il dato rotto ordinario.

*87. Del resto può sempre determinarsi *a priori* se un rotto comune, che si suppone schisato, è riducibile o no esattamente a rotto decimale. Riflettendo infatti che con aggiungere uno o più zeri al numeratore, non si fa altro che renderlo multiplo di 10, 100, 1000 ec. e dei loro divisori esatti, quali sono visibilmente e unicamente il 2 e il 5 presi per fattori, sia isolatamente sia insieme, una o più volte, deve inferirsene che *sono trasformabili esattamente in decimali quei rotti soltanto il cui denominatore non contiene altri elementi semplici che il 2 e il 5*. Se anzi si osservi di più, che ogni zero aggiunto al numeratore porta una cifra di più nel quoziente, e che d'altronde gli zeri da aggiungersi debbono per lo meno esser tanti quanti sono i fattori eguali a 2 o a 5 che compongono il denominatore, potrà stabilirsi che il decimale esatto proveniente da un rotto comune dovrà risultare di un numero di cifre eguale al numero delle volte che il 2 o il 5 entrano come fattori nel denominatore. Così può preventivamente asserirsi che i rotti $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{11}{80}$ sono riducibili esattamente a decimali, perchè i loro denominatori non hanno altri elementi fuorchè il 2 e il 5, e che risulteranno per il primo tre cifre decimali, per il secondo due, e per il terzo quattro. Di fatto si trova $\frac{5}{8}=0{,}625$; $\frac{2}{25}=0{,}08$; $\frac{11}{80}=0{,}1375$.

*88. Tutti quei rotti pei quali non si verifica la sopra espressa condizione daranno luogo infallibilmente ad una frazione decimale che procede all'infinito; poichè per quanti zeri si aggiungano al numeratore di un rotto, è certo che non verrà mai a rendersi divisibile esattamente per il denominatore, se questo ha elementi diversi dal 2 e dal 5; nè quindi si giungerà mai ad ottenere un resto zero che termini l'operazione. Succede in tal caso, come abbiamo accennato (86), che alcune cifre del quozlente, e anche tutte se gli elementi del denominatore son tutti diversi da quelli del 10, ritornano incessantemente nel medesimo ordine col quale son comparse la prima volta, e così la frazione decimale risulta parzialmente o interamente periodica. Se ne hanno degli esempi nei rotti

$$\frac{3}{44}=0,068181\ldots;\ \frac{7}{9}=0,77\ldots;\ \frac{1}{101}=0,00990099\ldots.$$

*89. Proponiamoci adesso di risalire al rotto ordinario da cui proviene una data frazione decimale. Se questa è finita, basterà, come ben facilmente si intende, esprimerla in forma di rotto ordinario e quindi ridurla, se ne è suscettibile, alla più semplice espressione, applicando a tale effetto, ove occorra, la regola del massimo comun divisore (47). Così per trovare il rotto generatore del decimale 0,625, porremo $0,625=\frac{625}{1000}$ e, schisando per 125 massimo comun divisore di 625 e di 1000, avremo $0,625=\frac{5}{8}$, come doveva essere (87). Ma si abbia invece la frazione interamente periodica 0,6363 .... Sottraendola dal suo prodotto per 100, otterremo senza dubbio 63,6363 .... —0,6363 .... =63, giacchè i periodi sono infiniti, e 63 interi esprimeranno perciò 100 volte meno una volta, ossia 99 volte, il valore della data frazione; onde questa equivarrà a $\frac{63}{99}$ ovvero a $\frac{7}{11}$. Se il periodo della frazione decimale fosse stato di tre cifre, come in 0,594594...., avremmo invece moltiplicato per 1000, ciò che ci avrebbe dato 594,594.... —0,594594 .... =594. E qui pure riflettendo che 594 è *mille meno una volta*, cioè 999 volte la data frazione, ne avremmo del pari dedotto 0,594594.... $=\frac{594}{999}$ ossia $\frac{22}{37}$, schisando per 27. In generale sottraendo la proposta frazione dal suo prodotto per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del periodo, si ha di resto un numero intero espresso dal periodo, e questo numero intero equivale alla data frazione moltiplicata per un numero composto di tanti 9 quante sono le cifre del periodo medesimo; onde può stabilirsi che *si ritorna al rotto generatore di un decimale interamente periodico, dando al periodo un denominatore formato di tanti 9 quante cifre ha il periodo, e riducendo all'espressione più semplice il rotto che ne risulta.* A questa stessa regola si perverrebbe osservando che i decimali 0,111..., 0,010101..., 0,001001.... ec. sono gli sviluppi che respettivamente derivano da $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$,

$\frac{1}{999}$ ec., e che ogni frazione decimale tutta periodica può sempre decomporsi in due fattori uno dei quali è il periodo in forma di numero intero e l'altro uno dei precedenti sviluppi. Così si troverebbe $0{,}5151.... = 51 \times 0{,}0101.... = 51 \times \frac{1}{99} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$.

Se in ultimo la fraziune decimale sia periodica soltanto in parte, comincceremo dal moltiplicarla per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre precedenti il periodo, il che otterremo portando la virgola al principio del periodo medesimo (79). Allora la parte non periodica diventerà un numero intero: e posto questo da parte, rimarrà una frazione interamente periodica, della quale determineremo il valore nel modo espresso di sopra. Otterremo così un rotto che, diviso per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre fuor di periodu, e sommato col numero intero lasciato a parte e diviso esso pure per l'unità seguita dal medesimo numero di zeri, ci darà l'equivalente della proposta frazione. Prendiamo ad esempio il rotto decimale 0,068181.... Qui due essendo le cifre fuor di periodo, moltiplicheremo per 100 e verrà $0{,}068181.... \times 100 = (79.\ \text{VII.}^a)\ 6{,}8181.... = 6 + 0{,}8181.... = 6 + \frac{81}{99}$. Dividiamo ora per 100, risulterà $0{,}068181.... = \frac{6}{100} + \frac{81}{9900} = \frac{594+81}{9900} = \frac{675}{9900}$ rotto che schisato dà come doveva (88) $\frac{3}{44}$. In pratica *per trovare il rotto comune equivalente a un rotto decimale incompletamente periodico, basta prender la somma dei due rotti che si ottengono dando per denominatore alle cifre fuor di periodo quello che compete all'ultima di esse, e alle cifre componenti il periodo tanti 9 quante sono quest' ultime cifre, più tanti zeri quante sono le precedenti.* Applicando la regola a 0,13888....., si trova $0{,}13888.... = \frac{13}{100} + \frac{8}{900} = \frac{117+8}{900} = \frac{125}{900} = \frac{5}{36}$, come può verificarsi riducendo nuovamente a decimale l' ultimo di questi rotti.

Numeri complessi.

*90. Per valutare una quantità, fa di mestieri, come abbiamo altrove (1) accennato, confrontarla con un'altra quantità della medesima specie, che si prende convenzionalmente per unità e che ha una grandezza determinata e fissa. Il numero delle volte che questa seconda quantità si trova contenuta nella prima, ne somministra il valore o, come anche suol dirsi, la *misura*. Così se si adutta il *metro* per unità lineare, e se si trova che una data lunghezza lo contiene precisamente sette volte, essa è 7 metri, ossia 7 metri ne sono la misura.

*91. Ma non sempre una quantità data contiene un numero esatto di volte la propria unità; quanto più l'unità sarà grande, tanto più spesso potrà evidentemente verificarsi il contrario. In tal caso fa d'uopo confrontare

la quantità data, o meglio, ciò che avanza di essa dopo averla divisa per l'unità, con una frazione dell'unità medesima; cioè bisogna dividere l'unità in un tal numero di parti eguali, che una di queste entri un numero esatto di volte nel resto della data quantità, e agli interi ottenuti dal dividerla per l'unità aggiungere un rotto, che abbia per denominatore il numero delle parti che si son fatte dell'unità, e per numeratore il numero di queste parti che è contenuto nel resto. A tale effetto, per risparmiare molti inutili tentativi, bisognerebbe incominciar dal dividere l'unità in un gran numero di parti eguali, perchè queste risultando allora assai piccole, come è facile a intendersi, più facilmente una di esse potrà riuscire summultipla della quantità che trattasi di valutare: ma invece con molta avvedutezza, si preferisce di non dividerla sul principio altro che in un numero di parti assai limitato, e di aspettare a dividere e suddividere una di queste parti, piuttosto che l'unità primitiva, quando e quanto lo richiede il bisogno.

Supponiamo, per modo d'esempio, che dopo aver portata l'unità lineare sopra una lunghezza da misurarsi, vi si trovi contenuta 7 volte e abbia luogo un avanzo. Divisa l'unità in un certo numero di parti eguali, per es. in 20, e presa una di queste come una nuova unità, la porteremo su quell'avanzo; e se vi si troverà contenuta un numero esatto di volte, come sarebbe 11, ne concluderemo, che la data lunghezza è 7 unità più $\frac{11}{20}$ di essa, ossia più 11 unità di un ordine inferiore, cioè 20 volte più piccole dell'unità principale. Ma se oltre il numero 11, si avrà un nuovo resto, porteremo sopra di esso una delle parti che si otterranno dal suddividere una delle precedenti in un certo numero di parti eguali, per es. in 12; e qualora vi si trovi contenuta precisamente, supponiamo 5 volte, ne inferiremo che la misura della data lunghezza è 7 unità più $\frac{11}{20}$ di unità più $\frac{5}{12}$ di $\frac{1}{20}$ d'unità, ossia $7+\frac{11}{20}+\frac{5}{240}$, o anche, riducendo al medesimo denominatore i rotti e sommandoli, $7+\frac{137}{240}$; e così avremo ottenuto lo stesso effetto come se l'unità tutta intera fosse stata divisa fin da principio in 240 parti.

*92. Se nel dividere e suddividere l'unità per l'indicato motivo, piuttosto che procedere a caso, si fosse osservato un metodo uniforme; vale a dire, se dopo aver divisa l'unità in un certo numero di parti eguali, di una di queste se ne fosse formato il medesimo numero, come pure di una di quelle provenienti da questa suddivisione, e così via discorrendo; è chiaro che ne avremmo ottenute delle frazioni decrescenti con legge costante, e da potersi convertire più facilmente le une nelle altre. E se inoltre invece di determinare ad arbitrio il numero delle parti da farsi dell'unità con la prima divisione, si fosse prescelto il numero 10; la legge di decrescenza

di tali frazioni, sarebbe riuscita in perfetta corrispondenza a quella, con la quale si formano nel sistema di numerazione le unità degli ordini superiori, ossia avremmo ottenute delle frazioni decimali, di quelle frazioni cioè che si calcolano con la stessa facilità dei numeri interi, per la ragione appunto che si formano nel medesimo modo. Ma il far ciò non è in nostro arbitrio, attesochè non solo le grandezze delle varie unità di misura, ma anche le loro suddivisioni si trovano di già stabilite dalla convenzione; e oltre ad accettarle come sono, siccome per mala ventura si scostano dalla legge che abbiamo espressa, bisogna di più occuparci del modo speciale di calcolare i numeri che ne derivano, numeri che si chiamano *complessi*, perchè insieme con le unità principali di una certa specie comprendono delle frazioni, ossia delle unità secondarie.

*93. Le più importanti unità di misura, cioè quelle di *lunghezza*, di *superficie*, di *capacità*, di *peso*, di *moneta*, di *tempo*, e degli *archi di circonferenza*, eccettuate quest' ultime due solamente, non sono per tutto le stesse, ma variano quasi da paese a paese, creando un imbarazzo di più alle scienze, alle arti e al commercio. Il sistema che è in uso presso i Francesi fin dal principio del nostro secolo, ed oggi presso la maggior parte degl' Italiani, vien giustamente riguardato come il migliore di tutti, e forse diverrà universale, come quasi lo è già nelle scienze; perciò noi lo esporremo insieme con quello, che ultimamente vigeva in Toscana.

*94. L' unità di lunghezza è il *metro*, che corrisponde alla diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre, che passa per Parigi, e dal metro si deducono tutte le altre unità di misura, nel modo che poi diremo (*a*). Il metro è diviso in parti decime, centesime, millesime ec., che sono respettivamente denominate *decimetri*, *centimetri*, *millimetri* ec., come all' opposto si chiamano *decametro*, *ettometro*, *kilometro*, *miriometro* le lunghezze dieci, cento, mille, diecimila volte più grandi del metro. Avvertiremo anzi che in questo sistema, le voci *deci*, *cehti*, *milli* ec. derivate dal latino, indicano sempre i summultipli decimali, e le voci *deca*, *etto*, *kilo* ec. esprimono invece i multipli egualmente decimali di quell' unità, al nome della quale si trovan premesse. Così, per es., *kilogrammo* significa mille *grammi*, mentre *milligrammo* non esprime altro che la millesima parte del *grammo*. In Toscana precedentemente si aveva il *braccio*; esso è diviso in 20 parti eguali che si chiamano *soldi*, e ogni soldo è diviso in 12 parti eguali che si chiaman *denari*. Per le lunghezze agrarie avevamo la *canna*, che è cinque braccia, e per le itinerarie il *miglio*, che è braccia $2833\ \frac{1}{3}$ (*b*).

(*a*) L'idea di derivare da una sola le altre unità di misura fu concepita e attuata con molta semplicità ed eleganza dagli antichissimi Egiziani. Avevano essi per unità lineare una lunghezza presa dalle dimensioni del corpo umano, cioè il *cubito reale*, che era il doppio di un piede naturale; il cubo del mezzo cubito, ossia del piede, costituiva l'unità di volume; lo stesso cubo pieno d' acqua dava l' unità di peso, e un' unità di peso in argento somministrava l' unità di moneta.

(*b*) L'antico miglio toscano era di 3000 braccia; ma il Granduca Pietro Leopoldo, che

Il braccio corrisponde a metri 0,583626, e il metro a braccia 1,713426.

Il miglio è 1,653607 kilometri, e il kilometro miglia 0,604738.

*95. L'unità di superficie è il *metro quadrato*, cioè una superficie quadra che ha per lato un metro. Il *decametro quadrato*, si chiama *aro*, e comprende cento metri quadri. L'*ettaro* che serve per le più grandi superficie è, come lo indica il nome, cento ari, e perciò diecimila metri quadri.

In Toscana l'unità di superficie era precedentemente il *braccio quadro*, cioè una superficie quadra che ha per lato il braccio lineare, e comprende 400 *soldi quadri*. Per l'Agrimensura avevamo dal 1782 in poi il *quadrato*, che è diecimila braccia quadre, e si divide in 10 *tavole*, in 100 *pertiche*, e in 1000 *deche;* cosicchè la deca è dieci braccia quadre, la pertica dieci deche, ossia cento braccia qnadre, e la tavola dieci pertiche, ossia mille braccia quadre. Lo *stioro*, misura antica, corrisponde a braccia quadre $1541\ \frac{1}{3}$.

Il br.º quadro è metri quadri 0,34062, e il metro quadro br.ª quadre 2,93583.

Il quadrato è ettari 0,34062, e l'ettaro quadrati 2,93583.

*96. Tanto per le materie aride come per le materie liquide abbiamo per unità di capacità il *litro*, che è un decimetro cubo, cioè un vaso in forma di dado, lungo, largo e alto un decimetro. Mille litri fanno un kilolitro, che ha la stessa capacità di un metro cubo. Lo *stero* non è altro che il metro cubo preso per unità di misura dei solidi.

Precedentemente la nostra unità di capacità per gli aridi era lo *staio*, per i liquidi il *barile*, e per i solidi il *braccio cubo*. Lo staio si divide in quattro *quarti*, il quarto in otto *mezzette*, e la mezzetta in due *quartucci;* tre staia fanno un *sacco*, e otto sacca formano un *moggio*. Il barile da vino non è lo stesso di quello da olio; il primo contiene venti *fiaschi*, e il secondo sedici: il fiasco poi è due *boccali*, il boccale 2 *mezzette*, la mezzetta due *quartucci*. Il braccio cubo è un solido in forma di dado, lungo, largo e alto un braccio lineare; due braccia cubiche costituiscono il *traino* di legname di costruzione, e 24 la *catasta* di legna da ardere.

Lo staio corrisponde a litri 24,362862, il litro corrisponde a staia 0,041046.
Il barile da vino a litri . . 45,584041, il litro a barili da vino . . 0,021937.
Il barile da olio a litri . . 33,428908, il litro a barili da olio . . 0,029914.
Il braccio cubo a steri . . 0,198794, lo stero a braccia cube . . 5,030330.

*97. L'unità di peso è il *kilogrammo*, che corrisponde al peso di un litro d'acqua stillata e alla temperatura di quattro gradi del termometro centigrado. Il *quintale* è 100 kilogrammi, e il *migliaio*, ossia la *tonnellata*, mille kilogrammi.

riformò il nostro sistema metrico, e che prima dei francesi tentò di introdurre la divisione decimale e la introdusse di fatto nelle misure agrarie, avendo soppresso il braccio da terra e ritenuto il braccio da panno, che è un poco più grande cioè $\frac{18}{17}$ del precedente, il miglio conservato nella sua lunghezza primitiva risultò eguale a braccia $2833\ \frac{1}{3}$.

Tra noi l' unità di peso era la *libbra:* si divide in 12 *oncie*, l' oncia in 24 *denari*, e il denaro in 24 *grani*: tre denari fanno una *dramma*, 25 libbre formano un *peso*, e 100 un *quintale*.

La libbra toscana equivale a kilogr. 0,339542, e il kilogr. a libbre 2,945144.

*98. L' unità di moneta è il *franco* o *lira italiana*, che vien formata con un pezzo di lega contenente una parte di rame sopra nove parti di argento puro, e del peso di cinque grammi.

La *lira*, che era la nostra unità di moneta, si divide in soldi e denari precisamente come il braccio. Sette lire fanno uno *scudo*.

La lira italiana corrisponde a $\frac{25}{21}$ di lira toscana, e questa corrisponde a $\frac{21}{25}$ di lira italiana; dimodochè 25 lire toscane valgono franchi, o lire italiane 21.

*99. L' unità di tempo è per tutte le nazioni il *giorno solare*. Si divide in 24 parti chiamate *ore*, l' ora in 60 *minuti primi*, e il minuto in 60 *secondi*. Una volta si dividevano i secondi in *terzi*, i terzi in *quarti* ec. ma oggi si adoprano invece le frazioni decimali del *secondo* Giorni 365 formano l' *anno comune*, 366 il *bisestile*, e giorni 365,242257, vale a dire giorni 365, ore 5, minuti 48 e secondi 51 formano l' *anno astronomico*.

*100. Il *grado* è egualmente per tutti l' unità di misura degli archi di circonferenza, della quale è la trecentosessantesima parte. Esso si divide come l' ora in minuti primi, in secondi e in parti decimali di secondo. Novanta gradi formano un *quadrante*. I Francesi vollero dividere il quadrante in cento gradi, ognuno di questi gradi in cento minuti, ognuno di questi minuti in cento secondi; ma tal divisione non prese piede nemmeno presso di loro.

Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione dei numeri complessi.

101. Per sommare i numeri complessi, scrivo le une sotto l' altre le parti del nome stesso; poi sommo le colonne al solito, andando da destra a sinistra, e scrivo ciò che resta dopo averne tolto, se si può, di che formare una o più unità della specie immediatamente maggiore, che porto nella colonna seguente.

Nel primo dei tre esempi che poniamo qui appresso, l' unità principale è il grado (100), come indica il piccolo zero segnato in alto alla destra del numero 36; gli apici similmente segnati a destra dei numeri 25 e 36 indicano primi e secondi. Nel secondo esempio l' unità principale è la *tesa*, antica unità di lunghezza dei Francesi, che giova conoscere. Essa si divide in 6 *piedi*, il piede è 12 *pollici* e il pollice 12 *linee*. Corrisponde a metri 1,94904, e a braccia 3,339531.

36°	25′	47″
49	33	28
55	31	49
141	31	4

tese	piedi	pol.	lin.
9	3	11	2,37
100	0	0	0,50
47	5	3	8,46
11	0	10	8.24
168	4	1	7,57

lire	sol.	den.
325	17	4,3
15	11	6,5
25	1	8,4
4	10	0,9
371	0	8,1

102. Così le stesse specie si sottraggono; e se l'inferiore è più grande, si toglie un' unità dalla colonna che segue a sinistra nel numero superiore, per decomporla in tante unità della specie di quelle da sottrarsi. Esempj:

48°	16′	17″,3
24	23	12 ,4
23	53	4 ,9

tese	piedi	pol.	lin.
100	0	0	0,0
17	4	5	11,8
82	1	6	0,2

lire	sol.	den.
655	3	4
30	6	8
624	16	8

103. La moltiplicazione si fa nella maniera seguente.

	lire	sol.	den.
	678	15	0×2
	67	17	6×4
Br. 246 a Lire	6	15	9×6
	1357	10	0
	271	10	0
	40	14	6
Somma Lire	1669	14	6

Si cerchi il prezzo di braccia 246 di stoffa a lire 6. 15. 9. il braccio (i 15 son *soldi*, i 9 *denari*, e gli spazj interposti servono a separare l'una specie dall'altra). Moltiplico le date lire ec. per 10 e scrivo il prodotto di sopra, avvertendo però di non segnare dei prodotti delle specie inferiori se non ciò che resta dopo aver tolto, rome nell' addizione, di che formare quante unità potremo della superiore: regola che sempre terremo nella moltiplicazione. Quindi moltiplico nuovamente per 10 questo prodotto, e ciò tante volte quante bisogna per distribuir le cifre del moltiplicatore come nell'esempio. È chiaro che moltiplicando la quantità superiore (centupla della data) per 2, avrò il valor di 200 braccia; moltiplicando la quantità che segue (decupla della data) per 4, avrò il valor di 40 braccia; e finalmente moltiplicando per 6 la data, avrò il valor di 6 braccia; i quali valori sommati mi danno il prezzo di braccia 246.

104. Osservate 1.° che un rotto ordinario di specie superiore si riduce alle inferiori col moltiplicarlo per il loro numero caratteristico, ossia per quelle tante unità di specie inferiore che formano un' unità della superiore; così per avere $\frac{7}{12}$ di lira in soldi e denari, si dirà: $\frac{7}{12}\times20=11\frac{2}{3}$ soldi, e poi $\frac{2}{3}\times12=8$ denari: onde $\frac{7}{12}$ sono 11 soldi e 8 denari; 2.° che le specie inferiori si riducono alla superiore col dividerle per il loro numero caratteristico; così lire 2. 3. 4=2. $3\frac{4}{12}$=2. $3\frac{1}{3}=2\frac{10}{60}=2\frac{1}{6}$.

105. Quanto alla divisione, voglia verificarsi il primo esempio di sopra, cioè si debban dividere lire 1669. 14. 6 per 246. Divido le lire, ed ho il quoziente 6 col resto 193. che riduco a soldi, moltiplicandolo per 20, ed aggiungendo al prodotto i soldi della quantità proposta. Proseguo al solito

la divisione ed ho 15 di quoziente col resto 184, che moltiplico per 12, e coll'aggiunta de' 6d ho per prodotto 2214 e per quoziente 9 senza resto, come doveva essere. Se l'avanzo moltiplicato per il numero respettivo fosse più piccolo del divisore, passerei a moltiplicarlo per il numero caratteristico della specie seguente, scrivendo zero nel quoziente. Così dividendo lire 526. 0. 5 per 35, ho lire 15. 0. 7.

```
              | 6   15   9
Lire       1669   14   6
per 246 /  193×20
           3874
           1414
            184×12
           2214
            000
```

106. Fin qui il moltiplicatore (103), e il divisore (105), sono stati semplici, cioè d'una sola specie: ecco la regola da tenersi se sieno composti, cioè se contengano essi pure parti di specie inferiore. Si cerchi il prezzo di 42tese 5piedi, 4poll. a lire 18. 6. 8 la tesa. Moltiplico le lire come sopra per 10 ec. e poichè i piedi sono $\frac{1}{6}$ della tesa, divido il prezzo di una tesa, cioè le lire soldi e denari dati, per 6, e ho in quoziente il prezzo di un piede; parimente poichè il pollice è $\frac{1}{12}$ del piede, divido per 12 il prezzo avuto del piede, ed ho il prezzo di un pollice. Fatto ciò distribuisco il moltiplicatore come nell' esempio: il primo e secondo prodotto danno il valore degli interi, cioè delle tese, i due seguenti quello dei piedi e pollici; la somma sarà dunque il prezzo totale.

```
                          183   6   8    ×4
42tes. 5pi. 4pol. a Lire   18   6   8    ×2
                    6 /     3   1   1 1/3 ×5
                   12 /     —   5   1 1/9 ×4
                          733   6   8
                           36  13   4
                           15   5   6 2/3
                            1   0   4 4/9
            Somma Lire    786   5  11 1/9
```

Si voglian dividere lire 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$ per 42tese 5piedi 4pol. in riprova del passato esempio. Riduco il divisore alla specie ultima, come qui le tese a pollici; cioè moltiplico 42 per 6, aggiungendo al prodotto (che son le tese ridotte in piedi) i 5 piedi del divisore, ed ho 257; moltiplico 257 per 12, e al prodotto (che son le tese e i piedi ridotti in pollici) aggiungo 4, ed ho 3088 pollici ossia $\frac{3088}{72}$ di tesa per divisore. Dipoi moltiplico per 72 le lire 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$ come bisogna (68); e finalmente divido il prodotto, che è 56613. 6. 8 per 3088, come nell'esempio, e trovo il quoziente 18. 6. 8.

```
                          | 18    6    8
                     L.    786    5   11 1/9 ×72
42tese 5pi. 4pol. /      56613    6    8
42×6                     25733
257×12                    1029×20
3088                     20586
                          2058×12
                         24704
                          0000
```

Dovendo dividere lire 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$ per lire 18. 6. 8 prezzo della tesa, onde l quoziente sia in tese, riduco le specie inferiori alla superiore, ed ho lire 18. 6. 8$=18\frac{1}{3}=\frac{55}{3}$; lire 786. 5. 11 $\frac{1}{9}$ =lire $786\frac{8}{27}$; dunque avrò $786\frac{8}{27}:\frac{55}{3}=2358\frac{8}{9}: 55=$tese 42. 5. 4.

*107. Non ci tratterremo più a lungo intorno alle quattro operazioni dei numeri complessi; tantopiù che essi posson sempre ridursi, come abbiamo di sopra osservato (104), a frazioni ordinarie, e calcolarsi nello stesso modo di queste. Importa per altro avvertire, che nella moltiplicazione uno dei due fattori, e precisamente quello che si prende per moltiplicatore, deve essere o deve potersi riguardare come un numero astratto, e ciò perchè il moltiplicatore non può esprimere altro che il numero delle volte che deve sommarsi il moltiplicando (17). Quindi se un quesito porta a moltiplicare tra loro due numeri concreti, esso deve essere di tal natura da permettere che uno dei due fattori si assuma come numero astratto. Così per avere il prezzo di 42 tese, 5 piedi e 4 pollici a lire 18. 6. 8 la tesa, abbiamo potuto fare la moltiplicazione (106), perchè questo quesito conduce manifestamente a ripetere il prezzo di una tesa 42 volte, e a prenderne inoltre una parte corrispondente a quella frazione di tesa che vien formata da 5 piedi e 4 pollici. È poi inutile il dire che il prodotto risulta sempre della medesima specie del moltiplicando, ciò essendo evidente.

Riguardo alla divisione dobbiamo similmente avvertire, che il divisore deve esser sempre un numero o astratto, o della medesima specie del dividendo. Infatti quando il divisore è un numero astratto, o tale da potersi riguardare come numero astratto, la divisione è manifestamente possibile, perchè tutto si riduce a trovare una tal parte del dividendo che vien determinata dal divisore; e in tal caso il quoziente risulta della medesima specie ossia *omogeneo* del dividendo. Del pari la divisione è possibile, se il dividendo e il divisore sono omogenei, come è evidente; e il quoziente in questo caso risulta astratto, perchè esprime quante volte un numero di una certa specie ne contiene un altro della specie stessa. Ma se il divisore è *eterogeneo*, vale a dire di specie contraria al dividendo, nè può riguardarsi come numero astratto, allora la divisione è impossibile, perchè non potrebbe aversi un quoziente nè concreto nè astratto; non può aversi un quoziente concreto, perchè il suo prodotto pel divisore, come abbiam detto di sopra, ripugna; non può essere astratto, perchè il suo prodotto pel divisore risulterebbe omogeneo al divisore stesso, nè quindi riprodurrebbe il dividendo che è di specie contraria. Dunque non può aversi verun quoziente da due numeri eterogenei, se uno di questi e precisamente il divisore non è o non può considerarsi come numero astratto; giacchè col precedente ragionamento si proverebbe che la divisione è impossibile con un dividendo astratto e con un divisore concreto.

Potenze e Radici.

*108. Il prodotto che risulta da due o più fattori eguali, ossia dal moltiplicare più volte un numero per sè stesso, si chiama *potenza*. Il numero dei fattori eguali che producono la potenza, ne costituisce il *grado*, e perciò una potenza è del grado *secondo, terzo, quarto* ec. ovvero *seconda, terza, quarta* ec. se due, tre, quattro ec. sono i fattori eguali dai quali risulta. Così 9, 16. 125 sono potenze; 9 è la seconda potenza di 3, perchè eguale a 3×3; 16 essendo eguale a 4×4, come pure a $2 \times 2 \times 2 \times 2$, è la seconda potenza di 4 e la quarta di 2; $125 = 5 \times 5 \times 5$ è la terza potenza di 5.

All' opposto si chiama *radice* o *base* il numero che moltiplicato per sè stesso dà luogo alla potenza; e la radice pure è *seconda, terza, quarta* ec. o del *secondo, terzo, quarto ec. grado*, secondo il grado della potenza alla quale appartiene. Negli esempj precedenti 3 è la radice seconda di 9, 5 la radice terza di 125, e 2 la radice quarta di 16. Avvertiremo peraltro che, come la seconda potenza si chiama *quadrato* e la terza potenza *cubo*, per una ragione che vedremo nella Geometria, così le loro radici si chiamano *radice quadrata* e *radice cuba* o *cubica:* anzi la radice seconda si chiama anche semplicemente *radice*.

*109. Una potenza da effettuarsi o, come più comunemente suol dirsi, un *inalzamento a potenza*, si accenna scrivendo a destra e un poco più alto del numero da alzarsi a potenza, il numero che ne esprime il grado cioè l'*esponente*. Volendo, per esempio, indicare che 12 deve inalzarsi alla quinta potenza, si scrive 12^5; viceversa 4^2 indica che si vuole il quadrato di 4; e $5^3 = 125$ sta ad esprimere che elevando 5 alla terza potenza, si ottiene 125 di risultato. Se la quantità da inalzarsi a potenza fosse un prodotto o un quoziente semplicemente accennato, l' esponente si segna al di fuori della data quantità, chiudendo questa in una parentesi. Così $(4 \times 3)^2$ esprime doversi fare il quadrato di 4×3.

Osserveremo che l' inalzamento a potenza è un caso particolare della moltiplicazione, nello stesso modo che la moltiplicazione è un caso particolare dell' addizione: la moltiplicazione subentra all' addizione, quando sono eguali i numeri da sommarsi; l' inalzamento a potenza subentra alla moltiplicazione, quando sono eguali i numeri da moltiplicarsi.

Elevazione a Potenza.

*110. Segue dalle premesse definizioni che per elevare a potenza un numero, bisogna formare col numero stesso un prodotto, che lo contenga come fattore tante volte quante unità sono nel grado della potenza alla quale deve inalzarsi. Così per avere la settima potenza di 3, bisogna trovare il valore di $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Ora è chiaro che il modo più

naturale per la formazione di questo prodotto. consisterebbe nel moltiplicare successivamente per 3, prima 3, poi il prodotto di 3 per 3 ossia 9, quindi il prodotto di 9 per 3 ossia 27, e così di seguito: ma questo metodo esigendo 6 moltiplicazioni nel nostro esempio, e in generale tante quante sono le unità del grado della potenza meno una. riescirebbe troppo prolisso, e quindi giova indagare se sia possibile renderlo più speditivo. Basterà a questo effetto osservare, che *moltiplicando tra loro due o più potenze di un medesimo numero, il prodotto che ne risulta è una nuova potenza del numero stesso, e di un grado corrispondente alla somma dei gradi delle potenze che si moltiplicano*. Così $3^3 \times 3^4$, come pure $3^3 \times 3^3 \times 3$, ed egualmente $3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3$ valgon lo stesso che 3^7. Ciò si rende evidente, riflettendo che ognuna delle precedenti espressioni contiene il 3 come fattore lo stesso numero di volte, cioè 7; e che in generale la base comune di più potenze è tante volte fattore del loro prodotto, quante lo è di ognuna di esse. Se dunque dopo aver formata la seconda potenza di un numero, la moltiplicheremo per sè medesima, ne avremo la quarta, che moltiplicata per sè stessa, darà l'ottava; dalla quale in simil guisa otterremo la sedicesima ec. e così giungeremo rapidamente a quella che deve trovarsi, senza tutta percorrere la scala delle potenze inferiori che la precedono. Vogliasi per esempio il valore di 2^{18}. Avremo $2 \times 2 = 4$, seconda potenza di 2; $4 \times 4 = 16$, quarta potenza di 2; $16 \times 16 = 256$, ottava potenza di 2; $256 \times 256 = 65536$, sedicesima potenza di 2; e infine $65536 \times 4 = 262144$, potenza decimottava di 2.

*111. Se il numero da elevarsi a potenza fosse un prodotto di due o più numeri, è chiaro che ognuno di questi verrà a prendersi per fattore tante volte quante sono le unità dell'esponente, e che perciò tutti i fattori saranno in tal modo elevati alla potenza medesima a cui si inalza il prodotto. Così avremo $35^3 = (5 \times 7)^3 = 5 \times 7 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 = 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ $= 5^3 \times 7^3$. Di qui possiamo dedurre che *la potenza di un prodotto eguaglia il prodotto dei fattori elevati alla potenza stessa, e viceversa*.

*112. Riguardo all'inalzamento a potenza dei rotti, basta rammentarci che essi si moltiplicano tra loro prendendo il prodotto dei numeratori e dividendolo per quello dei denominatori (66), per intendere che *un rotto si inalza a potenza elevando a potenza ognuno dei suoi due termini*. Anzi siccome questa regola è generale, nè esclude il caso dei rotti improprj o apparenti, potremo concluderne che *la potenza di un quoziente* (50) *eguaglia il quoziente del dividendo e del divisore elevati all'istessa potenza, e viceversa*. Avremo perciò $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$; $\frac{9^3}{3^3} = \left(\frac{9}{3}\right)^3 = 3^3 = 27$.

Osserveremo che qualora il rotto da inalzarsi a potenza fosse decimale, potrà trattarsi come numero intero, purchè nel risultato, contando da destra a sinistra, si separi mediante la virgola un numero di cifre decimali eguale a quello che ne ha la data frazione moltiplicato per il grado della potenza; come può agevolmente dedursi da quanto abbiamo detto intorno

alla moltiplicazione delle frazioni di questa specie (81). Così troveremo $(0,8)^2=0,512$; $(0,07)^2=0,0049$.

*113. Per ciò che dovrà dirsi in appresso, gioverà qui dimostrare 1.° *che ogni quadrato ha il doppio, o il doppio meno uno, delle cifre della sua radice;* 2.° *che il quadrato della somma di due numeri si compone del quadrato del primo numero, del doppio prodotto di ambedue, e del quadrato del secondo.*

Il primo di questi teoremi si renderà manifesto, esaminando nella tavoletta di contro, la legge secondo la quale procedono i quadrati dei minimi numeri di una, due, tre, quattro ec. cifre. Se ne deduce infatti con la massima facilità ed evidenza, che i quadrati dei numeri compresi tra 1 e 10, cioè di una sola cifra, dovendo essere maggiori di 1 e minori di 100, avranno una o due cifre; che i quadrati dei numeri compresi tra 10 e 100, ossia di due cifre, debbono essere maggiori di 100 e minori di 10000, e perciò di tre o di quattro cifre; che parimente i quadrati dei numeri maggiori di 100 e minori di 1000, cioè di tre cifre, dovendo trovarsi al di sopra di 10000 e al disotto di 1000000, non possono avere che cinque o sei cifre ec. il che prova la nostra proposizione.

$$1^2=1$$
$$10^2=100$$
$$100^2=10000$$
$$1000^2=1000000$$
$$10000^2=100000000$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$$

*114. Passando all' altro teorema, supporremo per fissare le idee, che sia $12+8$ la somma da elevarsi a quadrato. Siccome si ottiene il quadrato di una quantità qualunque, moltiplicandola per sè stessa, dovremo dunque moltiplicare $12+8$ per $12+8$. Se or si riflette che moltiplicare $12+8$ per $12+8$, non significa altro se non che bisogna prendere o sommare $12+8$, e quindi ognuno di questi due numeri, 12 volte e 8 volte; apparirà chiaramente che l' operazione riducesi a formare i prodotti di 12 e di 8 tanto per 12 come per 8, e che in conseguenza il risultamento cercato si comporrà, di 12×12 cioè *del quadrato di un dei numeri dati:* di 8×12 e di 12×8, cioè *di due volte il prodotto degli stessi numeri*, e di 8×8, cioè *del quadrato dell' altro numero*, come doveva provarsi.

Di qui può evidentemente trarsi la conseguenza, che *il quadrato di un numero composto di diecine e di unità, contiene il quadrato delle diecine, il doppio prodotto delle diecine per l' unità, e il quadrato delle unità.* Con l' aiuto di questo principio, del quale tra breve sperimenteremo l' utilità, i giovani potranno vantaggiosamente indagare la dimostrazione di quelli che qui sotto enunciamo.

1.° Ogni numero pari che non si divide esattamente per 4 non può mai essere un quadrato perfetto, ossia il quadrato di un altro numero.

2.° Ogni numero impari che diminuito di un' unità non divenga multiplo di 4, non può essere un quadrato perfetto.

3.° Verun numero che termini con le cifre 2, 3, 7, 8 può essere un quadrato.

4.° Verun numero può essere un quadrato, se termina con la cifra 5, e le sue diecine sono più o meno di due.

Estrazione della radice quadrata.

*115. Facile è, come abbiamo visto, elevare un numero qualunque ad una data potenza, ma non può per avventura dirsi lo stesso dell' *estrazione della radice*, di quella operazione cioè mediante la quale dee risalirsi dalla potenza a quel numero che l'ha prodotta. Questa operazione, direttamente opposta all' inalzamento a potenza come la divisione alla moltiplicazione, riesce tanto più laboriosa e complicata, quanto è più grande il numero sul quale deve operarsi e più elevato il grado della radice da estrarsene. L'Algebra però nella teoria dei radicali, e meglio in quella dei logaritmi, somministra delle regole non meno facili che speditive per l' estrazione delle radici di qualunque grado; e per questo appunto noi ci contenteremo di esporre qui soltanto il modo di estrarre le radici quadrate.

Per indicare che da un dato numero deve estrarsi la radice quadrata, si fa semplicemente precedere al numero stesso il segno *radicale* $\sqrt{\ }$. Così per esprimere che da 144 si vuole estratta la radice quadrata, scrivesi $\sqrt{144}$ che si enuncia *radice seconda* o anche soltanto *radice* di 144. Col medesimo segno si accennano pure le radici dei gradi superiori al secondo, ma allora si pone in seno ad esso il numero corrispondente al grado della radice da estrarsi. Così le espressioni $\sqrt[4]{256}$, $\sqrt[5]{25\times8}$, $\sqrt[3]{\frac{81}{8}}$ indicano respettivamente che vuolsi la radice *quarta* di 256, la radice *quinta* di 25 moltiplicato per 8, la radice *terza* di $\frac{81}{8}$ ovvero di 81 diviso per 8. Ma procediamo all'estrazione della radice seconda della quale soltanto intendiamo occuparci.

*116. Un numero di una o due cifre ha la sua radice di una sola cifra (113), nè questa può trovarsi altrimenti che per via di tentativi, vale a dire, che per averla bisogna confrontare il numero dato coi quadrati dei numeri semplici, che disponendoli secondo il loro ordine naturale sono i seguenti:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Vogliasi per esempio la radice di 56; confrontato questo numero coi precedenti, e visto che non si eguaglia ad alcuno di essi, dovrem concludere che non è un quadrato perfetto. Se si osservi per altro che 56 è compreso tra 49 e 64, cioè tra i quadrati di 7 e di 8, potrem dire che 7 è la radice approssimata di 56, oppure che 49 è il massimo quadrato contenuto in 56.

*117. Passiamo a supporre che il numero dato abbia tre o quattro cifre; e sia per esempio 6241. La sua radice ne avrà due (113), e quindi conterrà un certo numero di diecine e un certo numero di unità, e 6241 sarà la somma del quadrato di queste diecine, del doppio prodotto di esse per le unità, e del quadrato di queste stesse unità (114). Ciò posto, faremo riflettere che,

siccome le diecine inalzate a quadrato danno sempre delle centinaia, il quadrato delle diecine della nostra radice dovrà tutto trovarsi nelle 62 centinaia del numero dato. Perciò fermeremo la nostra attenzione sopra queste due cifre, che separeremo con un punto dall'altre; e cercheremo la radice del massimo quadrato di diecine contenuto in 62 centinaia, ossia il massimo quadrato di unità contenuto in 62, ciò che sarà visibilmente lo stesso e che potrà ottenersi nel modo di sopra (116) indicato. Confrontando 62 con i quadrati dei numeri semplici, si trova compreso tra 49 e 64, quadrati di 7 e di 8; dunque 7 sarà la cifra delle diecine della radice.

Scritta di fronte e sopra al numero dato la cifra trovata, come vedesi nell'esempio, ne sottrarremo il quadrato 49 da 62, e accanto al resto 13 abbasseremo le altre due cifre. Il risultato 1341 ottenuto in tal guisa sarà evidentemente il doppio prodotto delle diecine per le unità, più il quadrato delle unità. Or è facile a intendersi che se 1341 contenesse soltanto il doppio prodotto delle diecine per le unità, basterebbe dividerlo prima per 2 e poi per 70, o meglio dividerlo in una volta sola per 140 doppio delle diecine trovate, e si avrebbero in quoziente le unità, che restan tuttora a trovarsi. Ma siccome quel numero contiene di più il quadrato delle unità, non vi ha dubbio che un tal quoziente potrebbe risultare maggior del dovere. Ciò non ostante noi eseguiremo l'indicata divisione; se non che, per evitare l'errore nel quale per l'anzidetta ragione potremmo incorrere, aspetteremo a segnare in radice il quoziente, quando ci saremo assicurati che esso non è troppo grande. Pertanto, dopo aver trovato che 1341 diviso per 140 dà di quoziente 9, moltiplicheremo 140+9, o meglio 149, per 9 ad oggetto di ottenere un prodotto che sarà evidentemente il doppio prodotto delle diecine per 9 unità più il quadrato di 9 unità, e lo confronteremo con 1341. Se si troverà minore o eguale a questo numero, saremo certi che le unità della radice son 9; se avverrà il contrario, dovremo concludere che il quoziente 9 è troppo grande, e in tal caso lo diminuiremo di unità in unità finchè non dia un prodotto minore o al più eguale a 1341. Or siccome 149 moltiplicato per 9, dà precisamente 1341; son veramente 9 le unità cercate, e quindi 79 è la radice quadrata di 6241.

```
        79
     ------
  7   62.41
      49
     ------
149   1341
      1341
     ------
         0
```

Si osserverà che il calcolo precedente consiste in sostanza; 1.° nel trovare la radice del massimo quadrato contenuto in ciò che resta del numero proposto, dopo averne separate le due ultime cifre; 2.° nel sottrarre dal numero stesso le centinaia che provengono dall'inalzare a quadrato le diecine della radice trovate con la prima operazione; 3.° nel dividere il resto che se ne ottiene, per il doppio delle stesse diecine, e nel diminuire questo quoziente se e quanto può occorrere, per adempire alla condizione, che unendolo al doppio delle diecine e moltiplicando per esso la somma, ne risulti un prodotto eguale o minore al resto trovato con la precedente sottrazione.

*118. Debba ora estrarsi la radice quadrata da un numero di cinque o

di sei cifre, e sia 61584 questo numero. La sua radice sarà di tre cifre (113), e quindi conterrà centinaia, diecine e unità: pure siccome le centinaia non sono altro che un complesso di diecine, potremo riguardarla come composta di diecine e di unità solamente. Così anche il numero 61584 sarà la somma del quadrato di un certo numero di diecine, del doppio prodotto di esse per un certo numero di unità, e del quadrato di queste stesse unità; e la ricerca attuale differirà dalla precedente in questo sultanto, che le diecine della radice saranno espresse non da una, ma da due cifre.

Ciò premesso, rifletteremo che il quadrato di tutte le diecine della radice deve esclusivamente trovarsi tra le centinaia del numero proposto, e ne dedurremo che basterà estrarre la radice di 615, per avere il numero totale delle diecine della radice cercata. Or 615, vale a dire ciò che resta separando con un punto le due cifre finali di 61584, è un numero di tre cifre; e quindi per averne la radice, non vi sarà bisogno che di applicare la regola già stabilita per questo caso (117). Separiamo dunque altre due cifre e cerchiamo la radice di 6. Trovandosi che questa è 2, segnamola al solito sopra e di contro al numero dato; e sottrattone il quadrato 4 da 6, abbassiamo 15 accanto al resto. Avremo così il numero 215 da dividersi, a forma della citata regola, per il doppio delle 2 diecine trovate, ossia per 40, numero che perciò scriveremo in forma di divisore di fronte a 215, lasciando per altro sottinteso lo zero per segnare in suo luogo il quozicnte. Procedendo alla divisione, si trova di quoziente 5, ma siccome 45×5 darebbe 225 maggiore di 215, fa di mestieri ridurlo a 4. Scritta questa cifra accanto al divisore nel luogo ove avrebbe dovuto segnarsi lo zero, come pure a destra delle due diecine trovate, e sottratto il prodotto di 44×4 da 215, ne risulta il resto 39; dunque 24 è la radice approssimata di 615, ossia la radice del massimo quadrato contenuto in 615, e in conseguenza il numero totale delle diecine della radice cercata sarà 24.

	248
2	6.15.84
	4
44	215
	176
488	3984
	3904
	80

A questo punto avvertendo che il resto 39 esprime le centinaia che avanzano dopo aver tolto dalle centinaia del numero proposto il quadrato delle diecine; se si abbassano accanto a questo resto le due ultime cifre, e se si ripete il ragionamento fatto nell'esempio precedente, si renderà chiaro, che per trovare le unità della radice, basta dividere 3984 per il doppio delle diecine trovate ossia per 480. Segneremo perciò questo numero in forma di divisore, omettendo peraltro lo zero. Il quoziente 8 che operando in tal modo si ottiene, posto a destra di 24 e di 48, dà $488\times8=3904$ prodotto minore di 3984, e quindi esprime le unità della radice. Questa sarà dunque 248, cioè 248 sarà la radice del più gran quadrato contenuto in 61584; giacchè questo numero, come lo indica il resto 80, non è un quadrato perfetto.

*119. Il ragionamento e il calcolo che ci hanno servito di guida e di mezzo per arrivare a conoscere le radici quadrate dei numeri presi ad esem-

pio, possono facilmente applicarsi alla ricerca della radice di qualunque numero. Infatti la radice di un numero qualunque può sempre riguardarsi come composta unicamente di diecine e unità; la determinazione del numero delle diecine porta sempre a separare due cifre sulla destra del numero dato, e a cercar la radice di ciò che rimane; e la determinazione delle unità porta sempre a dividere per il doppio delle diecine l'avanzo che si ottiene sottraendo dal dato numero il quadrato delle diecine medesime. Potremo perciò stabilire la seguente regola generale.

Per estrarre la radice quadrata da un numero qualunque, si comincia dal dividerlo in classi di due cifre per ciascheduna, contando da destra a sinistra e non curando che l'ultima classe risulti di una cifra soltanto. Si estrae quindi la radice da quest' ultima classe (che viene ad essere la prima a sinistra), e da essa si sottra il quadrato della cifra trovata in radice. Il doppio di questa cifra scrivesi a guisa di divisore di contro al resto, e quindi si divide per il numero delle diecine espresso da tal divisore il numero che viene a formarsi abbassando accanto al resto la classe seguente. Il quoziente così ottenuto ci dà la seconda cifra della radice, e deve essere scritto a destra tanto della prima cifra come del divisore. Dopo di ciò si moltiplica il divisore per la cifra trovata, se ne sottra il prodotto dal numero che ha servito di dividendo, si abbassa accanto al resto la classe seguente, si raddoppia l'ultima cifra del divisore, si torna nuovamente a dividere, e si ottiene così la terza cifra della radice. Scritta ancor questa a destra delle prime due e accanto al nuovo divisore, si ripete la medesima serie di operazioni, e si seguita in questo modo finchè nel numero dato vi sono classi da potersi abbassare.

*120. Oss. I.ª I prodotti che si formano per ogni cifra che risulta in radice, si possono sottrarre a misura che si vanno formando, senza scriverli sotto ai numeri dai quali debbono esser sottratti, operando precisamente nel modo che abbiamo indicato per la divisione (33).

II.ª Talvolta succede che abbassando una delle classi a destra di uno dei resti, ne risulta un numero minore di quello pel quale dovrebbe dividersi. Ciò indica che la radice non contiene nemmeno un' unità dell'ordine corrispondente alla classe abbassata; e quindi in tal caso bisogna segnare zero in radice, e poi abbassare la classe seguente per continuare nel solito modo l' operazione.

III.ª Ottenendosi una cifra in radice per ogni classe che viene abbassata, oltre la cifra risultante dalla prima classe, ne segue che il numero delle cifre della radice eguaglia il numero delle classi.

Esempj:

	9402
9	88.39.80.60
184	739
18802	3 80 60
Resto	. . . . . 4 56

	19044
1	3.62.67.39.36
29	2 62
3804	1 67 39
38084	15 23 36
Resto	 0

*121. Nell'estrarre la radice quadrata dei numeri, avviene il più delle volte come nella divisione, che ha luogo un resto. Ciò non fa maraviglia, se si riflette che tra i quadrati di due numeri consecutivi, come sarebbero 100 e 121, quadrati di 10 e di 11, esiste sempre una quantità or più or meno grande di altri numeri che evidentemente non possono essere quadrati perfetti di numeri interi. Può peraltro a prima vista sembrare assai singolare che mentre può sempre ottenersi per mezzo delle frazioni il quoziente preciso di due numeri qualunque, e mentre per esempio $7:3$ è rigorosamente eguale a $2+\frac{1}{3}$, non possa in simil guisa completarsi la radice di un dato numero mediante l'aggiunta di una frazione, e che per modo d'esempio sia impossibile trovare una frazione ordinaria che, aggiunta all'unità, dia esattamente la radice di 2, radice che d'altronde è compresa tra 1 e 2. Pure non vi ha dubbio che sia così; e per andarne convinti, basta riflettere che un rotto, proprio o improprio che si supponga, moltiplicato per sè stesso, non può mai dare un prodotto intero, nè quindi può mai esprimere la radice di un numero intero. Sicchè se un dato numero intero non è il quadrato di un altro numero intero, la sua radice non può essere espressa esattamente da verun numero nè intero nè frazionario, ed è perciò *incommensurabile*, vale a dire non ha alcuna misura comune con l'unità. Ma dalla impossibilità di ottenere in numeri il valore esatto delle radici incommensurabili o, come più comunemente suol dirsi, *irrazionali*, non ne segue che non possa determinarsi in verun altro modo, e molto meno che non esista. Infatti la Geometria insegna a trovare il valore esatto di qualunque radice quadrata, e l'Aritmetica, come tra poco vedremo dopo aver trattato dell'estrazione della radice dai rotti, offre un mezzo facilissimo per ottenere un tal valore tanto approssimato quanto si vuole.

*122. *Per estrarre la radice quadrata da un rotto ordinario, si estraggono le radici quadrate dal numeratore e dal denominatore e si dividono l'una per l'altra.* Questa regola è conseguenza immediata di quella con la quale si inalzano a potenza i rotti ordinari (112), e quindi non abbisogna di essere dimostrata. Avremo perciò, per addur qualche esempio, $\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}$; $\sqrt{\frac{8}{81}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{81}}=\frac{\sqrt{8}}{9}$; $\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$. L'applicazione della regola che abbiamo enunciata esige l'estrazione di due radici, ma è facile accorgersi che può sempre risparmiarsene una. A questo effetto non si richiede altro che di trasformare il rotto dato in maniera che uno dei suoi termini diventi un quadrato perfetto, il che visibilmente si ottiene moltiplicandoli ambedue per uno di essi. Vogliasi per esempio la radice quadrata di $\frac{7}{11}$; moltiplicando sopra e sotto per 11, avremo $\frac{7}{11}=\frac{7\times11}{11\times11}=\frac{77}{11^2}$, e in conseguenza $\sqrt{\frac{7}{11}}=\sqrt{\frac{77}{11^2}}=\frac{\sqrt{77}}{\sqrt{11^2}}=\frac{\sqrt{77}}{11}$.

*123. L'estrazione della radice quadrata dai rotti decimali si effettua

nello stesso modo che dai numeri interi, con la sola differenza che prima di procedere all'operazione bisogna, mediante l'aggiunta di uno zero (74. II.ª) a destra del rotto dato, render pari, se già non lo è, il numero delle cifre decimali, e che dopo aver trovata la radice fa d'uopo separare da essa la metà delle cifre decimali esistenti nel dato rotto. S'intenderà facilmente che deve operarsi in tal modo, riflettendo che s'inalza a quadrato un rotto decimale, moltiplicandolo per sè stesso come se fosse un numero intero, e separando dal prodotto che ne risulta il doppio delle cifre decimali che sono nel rotto da inalzarsi a quadrato (112). Se dunque si vogliano le radici quadrate di 0,0625; 0,625; 4,56; basterà trovare i respettivi valori di $\sqrt{625}$; $\sqrt{6250}$; $\sqrt{456}$; e poi separare due cifre decimali nelle prime due di queste radici e una nella terza. Operando così troveremo che la radice di 0,0625 è precisamente eguale a 0,25 e che quelle di 0,625 e di 4,56 sono approssimativamente eguali la prima a 0,79 e la seconda a 2,1.

Qui cade in acconcio il fare un'osservazione analoga a quella che facemmo nella divisione dei rotti decimali (84). Siccome i rotti di questa specie non soffrono la menoma alterazione per quanti zeri si aggiunngano alla loro destra, è chiaro che qualora l'estrazione della radice quadrata da un rotto decimale porti ad un resto, come per lo più succede, potremo continuare a piacimento l'operazione, purchè a destra del rotto dato si aggiunga un numero pari di zeri, e questi si abbassino a due per volta accanto ai resti che mano a mano risultano. In tal guisa si acquista il vantaggio di poter ottenere in radice tante cifre, che insieme con le precedenti, valgano ad esprimere il valore della radice cercata con quella maggiore esattezza che si vorrà.

	0,8366
8	0,70
163	600
1666	11100
16726	110400
	10044

Supponiamo che vogliasi la radice di 0,7 esatta sino a un diecimillesimo. Aggiunto per ora quel solo zero che nel caso attuale è necessario per pareggiare le cifre decimali, ed estratta la radice di 0,70, troveremo 0,8 in radice e 6 centesimi di resto. Poniamo adesso due zeri accanto a questo resto, senza curarci di scriverli a destra del rotto dato ove ci contenteremo di sottintenderli, e seguitiamo al solito l'operazione. Avremo 3 in radice e 111 di resto. Scritti accanto ad esso altri due zeri, risulterà 6 in radice e il nuovo resto 1104, che trattato come il precedente darà un'altra volta la cifra 6 in radice. Arrestandoci a questo punto, il rotto 0,8366 esprimerà evidentemente con la prefissa esattezza il valore della radice di 0,7.

*124. Il metodo che abbiamo esposto per l'estrazione della radice quadrata dai rotti decimali, è manifestamente applicabile alla ricerca del valore approssimato delle radici irrazionali dei numeri interi; imperciocchè qualunque numero intero può sempre ridursi a forma di rotto decimale, ponendo alla sua destra un certo nnmero di zeri preceduti da una virgola. Tanto per darne un esempio, cerchiamo la radice di 2 approssimata sino a un milionesimo. Dopo aver trovata la parte intera di radice di 2 e il resto 1, suppor-

remo a destra del 2 una virgola e quindi 6 coppie di zeri, da abbassarsi a una per volta a fianco del primo resto ottenuto e di quelli che successivamente si incontreranno, operando come per l'esempio del numero precedente. Il rotto decimale 1,414213 che ne risulterà, come è indicato dal tipo del calcolo, differirà meno di un milionesimo dal preciso valore di $\sqrt{2}$. Se poi piacesse di spingere l'approssimazione anche più oltre, non si avrebbe a fare altro che continuare l'operazione, continuando ad aggiungere altre coppie di zeri. Sicchè la valutazione delle radici irrazionali del secondo grado, può ottenersi con questo mezzo tanto approssimata quanto si vuole, e quanto potrebbe esigersi nei calcoli della maggiore importanza.

	1,414213
1	2
24	100
281	400
2824	11900
28282	60400
282841	383600
2828423	10075900
	1590631

Ragioni, Equidifferenze e Proporzioni.

125. Due quantità possono paragonarsi fra loro, esaminando o di quanto l'una è maggiore o minore dell'altra, o quante volte l'una è contenuta nell'altra o la contiene. La differenza o il quoziente che risultano da questi confronti diconsi *ragione* o *rapporto* delle due quantità. La ragione è aritmetica, se si prenda la *differenza*; è *geometrica*, se si prenda il quoziente. Le due quantità poste in confronto si chiamano *termini* della ragione, che si distinguono il primo col nome d'*antecedente*, l'altro con quello di *conseguente*. Per accennare la ragione fra due quantità s'interpongono fra esse due punti. Così le ragioni di 4 a 12, di 5 a 7, si accennano scrivendo 4 : 12, 5 : 7.

126. Veruna ragione aritmetica rimane alterata, se si aumentino o si diminuiscano i suoi due termini di un egual quantità. Così la ragione di 5 : 8 equivale a quella di 7 : 10, e di 1 : 4. Parimente veruna ragione geometrica rimane alterata, se si moltiplichino o si dividano i suoi due termini per una medesima quantità. Così la ragione geometrica di 8 : 10 equivale a quella di 16 : 20 e a quella di 4 : 5. Tuttociò è di per sè manifesto, e mostra che due o più ragioni possono essere eguali senza essere identiche, vale a dire che possono avere lo stesso valore e termini differenti.

127. Perchè due ragioni sieno assolutamente eguali è necessario 1.° che i loro termini dien luogo alla stessa differenza se sono aritmetiche, allo stesso quoziente se son geometriche; 2.° che l'antecedente sia in ambedue maggiore, o in ambedue minore del suo conseguente. Verificandosi queste due condizioni i quattro termini delle due ragioni diconsi essere in *ragion diretta* tra loro; avendo luogo la prima e non la seconda, si dicono essere *in ragione inversa* tra loro. Così il 3 e il 5, il 10 e il 12 sono tra loro in ragion diretta aritmetica; mentre il 5 e il 15, il 18 e il 6 sono in ragione inversa geometrica.

128. Due ragioni eguali e dirette (127) formano un'*equidifferenza* se le

ragioni sono aritmetiche, una *proporzione* se sono geometriche. Così 3:5.·.7:9 che si legge: 3 *sta a* 5 *aritmeticamente come* 7 *sta a*.9, esprime un' equidifferenza; mentre 3:9::4:12 che si enuncia: 3 *sta a* 9 *geometricamente come* 4 *sta a* 12, o più semplicemente *come* 4 *a* 12, è una proporzione. Il primo e l'ultimo termine di un'equidifferenza o di una proporzione diconsi *estremi*, i due di mezzo *medj*.

129. Due ragioni inverse comecchè non assolutamente eguali (127) non formano nè un' equidifferenza, nè una proporzione: ma può sempre ricavarsi dalle medesime tanto un' equidifferenza che una proporzione, invertendo i termini di una delle ragioni, cioè ponendo l'antecedente in luogo del conseguente e viceversa. Così dalle due inverse 5:15. 21:7, si ricava la proporzione 5:15::7:21, o l'altra 15:5::21:7. Infatti sì nell'una che nell'altra le due ragioni son eguali in tutto il rigore del termine (*ivi*). Che se si tratti soltanto di ragioni inverse geometriche, in luogo di rovesciare i termini di una di esse come abbiamo proposto, potranno anche scriversi nel loro ordine dato, ma ponendoli in forma di denominatore dell' unità. Così nell'esempio allegato avremo una proporzione scrivendo $5:15::\frac{1}{21}:\frac{1}{7}$. Il che, quando non fosse per sè medesimo manifesto, potrebbe provarsi osservando che la ragione $\frac{1}{21}:\frac{1}{7}$ non è che quella di 7:21 divisa in ciascun dei suoi termini per il prodotto 7×21. È dunque alla medesima equivalente (*ivi*), e sta per egual modo in proporzione col 5:15. Preverremo intanto, che allorquando la proporzione è scritta nell'indicato ultimo modo, in luogo di 5 *sta a* 15 come $\frac{1}{21}$ *a* $\frac{1}{7}$, si preferisce talvolta dire 5 *sta a* 15 in *ragione inversa* di 21 *a* 7, oppure *inversamente come* 21 *a* 7. Se poi si abbia la proporzione $2:6::\frac{3}{4}:\frac{18}{8}$, in più occasioni tornerà opportuno di leggere 2 sta a 6 in *ragion composta diretta* di 3 a 18, e *inversa* di 4 a 8.

130. Se accada che i due termini medj di una proporzione sieno eguali, come in 3:15::15:75, la proporzione si chiama allora *continua*, il termine ripetuto si chiama *medio proporzionale*, l'ultimo dei due estremi *terzo proporzionale*. Nelle proporzioni non continue, che diconsi anche *discrete*, l'ultimo dei due estremi si chiama *quarto proporzionale*.

L'equidifferenze e le proporzioni hanno delle proprietà che importa conoscere. Noi esporremo le principali che son le seguenti.

*131. 1.ª *Le somme dei medj e degli estremi nelle equidifferenze, e i loro prodotti nelle proporzioni si eguagliano.* Nel dimostrare questa proposizione potremo supporre per maggior semplicità che gli antecedenti siano respettivamente minori dei loro conseguenti, senza nuocere per questo alla generalità della conclusione a cui perverremo con tale ipotesi. Infatti ogni equidifferenza ed ogni proporzione o ha di già gli antecedenti minori dei conseguenti, o vi si riduce rovesciando ambedue le ragioni, ciò che evidentemente

non altera l'eguaglianza delle stesse ragioni, nè quindi l'equidifferenza o la proporzione da esse formata. Ciò posto, se si rifletta che il 2.° termine di ogni equidifferenza non è altro che la somma del 1.° termine e della differenza che passa tra l'uno e l'altro, e che il 4.° termine non è che il 3.° sommato con la stessa differenza, giacchè il 4.° termine deve superare il 3.° di quel tanto che il 2.° supera il primo; avremo che la somma dei termini 2.° e 3.°, ossia dei medj, equivarrà al 1.° termine più la differenza più il 3.° termine, e che la somma dei termini 1.° e 4.°, ossia degli estremi, equivarrà al 1.° termine più il 3.° termine più la differenza. Le due somme si comporranno adunque delle medesime parti, e perciò dovranno essere eguali. Passando alle proporzioni, osserveremo in simil guisa che il 2.° e il 4.° termine sono i respettivi prodotti del 1.° e del 3.° moltiplicati per la ragione geometrica di uno degli antecedenti al suo conseguente, ossia per il quoziente. Il prodotto dei medj avrà dunque per suoi fattori il 1.° termine, il quoziente e il 3.° termine; e il prodotto degli estremi avrà per suoi fattori il 1.° termine, il 3.° e il quoziente. Sicchè i due prodotti risulteranno dai medesimi fattori e perciò saranno eguali.

Osserveremo che se la proporzione fosse continua, il prodotto dei medj sarebbe il quadrato del medio proporzionale, dunque *il medio proporzionale eguaglia la radice quadrata del prodotto degli estremi.* Avremo del pari che *il termine medio di un' equidifferenza continua eguaglia la semisomma dei termini estremi.*

*132. II.ª *Essendo dati soltanto tre termini di un' equidifferenza o di una proporzione può sempre trovarsi l' altro termine.* Infatti se trattasi di un' equidifferenza, e se il termine mancante, che rappresenteremo con x, è uno degli estremi, risulta dalla proposizione precedentemente dimostrata che x deve essere un tal numero, che sommato con l' estremo cognito, dia un risultato eguale alla somma dei medj, e quindi per ottenerlo basterà sottrarre da questa somma l'estremo cognito (13). Così se abbiasi $3:7.\cdot.11:x$, risulterà $x=7+11-3=15$. Se poi x sia uno dei medj dovremo invece sottrar l' altro medio dalla somma degli estremi, perchè in questo caso x dovrà esprimere ciò che manca al medio cognito per eguagliare la somma degli estremi.

Trattandosi di proporzioni si otterrà il valore di x dividendo il prodotto dei medj, per l'estremo cognito, nel caso che x sia uno degli estremi; e dividendo il prodotto degli estremi per il medio cognito nel caso che x sia uno dei medj; perchè nel primo caso x dovrà esser quel numero che moltiplicato per l'estremo conosciuto, dà un prodotto eguale a quello dei medj; e nel secondo caso x dovrà essere un tal numero che moltiplicato per il medio conosciuto, dia un prodotto eguale a quello degli estremi. Così avendosi le proporzioni $12:63::4:x$, $3:4::x:6$, troveremo per la prima $x=\frac{63\times4}{12}=\frac{252}{12}=21$, e per la seconda $x=\frac{3\times6}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$.

*133. III.ª *Quattro termini formano sempre un' equidifferenza o una pro-*

porzione, se le somme o i prodotti degli estremi e dei medj si eguagliano. Infatti perchè quattro termini tali a talmente disposti da soddisfare all'enunciata condizione non costituissero un'equidifferenza o una proporzione, bisognerebbe che la somma o il prodotto degli estremi differisse dalla somma o dal prodotto dei medj, il che è contro l'ipotesi. Dunque dall'eguaglianze $7+13=8+12$, $5\times9=3\times15$, potremo dedurne l'equidifferenza $7:8.\cdot.12:13$ e la proporzione $5:3::15:9$.

*134. IV.ª *Niuna equidifferenza o proporzione si altera, cambiando di posto i medj o gli estremi, cioè* alternando; *oppure mettendo i medj in luogo degli estremi, cioè* invertendo. Questa proprietà è una conseguenza immediata della precedente, dalla quale risulta evidentemente, che in generale in un'equidifferenza o in una proporzione si possono fare, oltre l'indicato, tutti quei cambiamenti che non alterano l'eguaglianza tra le somme o tra i prodotti dei medj e degli estremi. Quindi tralasciando di occuparci ulteriormente delle equidifferenze, attesochè l'uso di esse è limitatissimo di fronte a quello delle proporzioni, potremo anche dedurne la seguente proprietà.

*135. V.ª *Una proporzione non s'altera, moltiplicando e dividendo per uno stesso numero un medio e un estremo.* È chiaro infatti che, operando in tal modo, il prodotto degli estremi viene aumentato o diminuito nello stesso rapporto di quello dei medj, e che in conseguenza i due prodotti si mantengono eguali. L'applicazione di questa proprietà riesce spesso utilissima, perchè serve a semplicizzare i termini della proporzione quando hanno dei fattori comuni, e a renderli interi tutte le volte che son frazionarj. Abbiasi, per esempio, la proporzione $\frac{5}{6}:30::\frac{1}{4}:9$; dividendo per 3 i conseguenti si trasformerà nell'altra $\frac{5}{6}:10::\frac{1}{4}:3$; moltiplicando ora i primi due termini per 6, e gli ultimi due per 4, otterremo $5:60::1:12$, e dividendo nuovamente la prima ragione per 5, $1:12::1:12$. Anzi osserveremo che per togliere i rotti, basta passare i divisori dei medj moltiplicatori degli estremi, e viceversa i divisori degli estremi moltiplicatori dei medj, giacchè quest'operazione equivale a moltiplicare i medj a gli estremi per uno stesso numero.

*136. VI.ª *Moltiplicando o dividendo termine a termine due proporzioni, i prodotti o i quozienti che ne risultano formano una proporzione.* Prendiamo due proporzioni a piacere, per esempio $5:27::10:54$; $2:9::8:36$. Eguagliando in ambedue il prodotto degli estremi a quello dei medj, ne risulterà $5\times54=27\times10$, $2\times36=9\times8$. Ora dalla moltiplicazione di queste due eguaglianze si ottiene $5\times54\times2\times36=27\times10\times9\times8$, ossia $5\times2\times54\times36=27\times9\times10\times8$; e di qui si deduce appunto, come sappiamo (133), la proporzione $5\times2:27\times9::10\times8:54\times36$ prodotto delle due date. Dalla divisione delle stesse eguaglianze, ne viene $\frac{5\times54}{2\times36}=\frac{27\times10}{9\times8}$ ossia

$\frac{5}{2}\times\frac{54}{36}=\frac{27}{9}\times\frac{10}{8}$, e in conseguenza la proporzione $\frac{5}{2} : \frac{27}{9} :: \frac{10}{8} : \frac{54}{36}$ quoziente delle due date.

Se invece di due proporzioni se ne avesse un numero qualunque potremo del pari dedurne una proporzione, sia col moltiplicarle tutte insieme, sia col dividere il prodotto di alcune di esse per il prodotto delle rimanenti; dal che inoltre ne segue che una proporzione non s'altera moltiplicandola due o più volte per sè medesima, vale a dire elevandone i termini a una stessa potenza, e perciò nemmeno estraendone la radice di uno stesso grado.

*137. VII.ª *In ogni proporzione la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti, come uno degli antecedenti sta al suo conseguente; e inoltre la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti.*

Così per esempio, dalla proporzione . . 1.ª $12:15::8:10$
potremo dedurre sommando gli antecedenti e i conseguenti, o come suol dirsi
componendo . . . . 2.ª $12+8:15+10::8:10$
sottraendo o come suol dirsi *dividendo*. 3.ª $12-8:15-10::8:10$
componendo e dividendo insieme . . . 4.ª $12+8:15+10::12-8:15-10$.
Ciò si comprenderà agevolmente, osservando che nella 2.ª e 3.ª i prodotti dei medj e degli estremi si eguagliano; perchè non sono altro che quelli della 1.ª ambedue aumentati, o ambedue diminuiti della stessa quantità, cioè di 8×10: e che la 4.ª è formata di due ragioni certamente eguali tra loro, perchè ognuna di esse eguaglia quella di $8:10$ come lo indicano le due proporzioni che la precedono.

*138. VIII.ª Infine, *avendo una serie di ragioni geometriche eguali, la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti, come uno qualunque degli antecedenti sta al suo conseguente.*

Abbiasi infatti la serie . . . . $2:3::4:6::8:12::10:15$.
Componendo la proporzione costituita dai primi due rapporti (137. VII),
avremo . . . . $2+4:3+6::4:6$,
oppure, giacchè $4:6=8:12$, ... $2+4:3+6::8:12$.
Componendo questa nuova proporzione, e ponendo $10:15$ invece di $8:12$,
risulterà. . . . . $2+4+8:3+6+12::10:15$,
dalla quale si dedurrà . . . . $2+4+8+10:3+6+12+15::10:15$.

È manifesto che in simil guisa potrebbe trattarsi un'altra serie di rapporti geometrici eguali comunque diversa dalla precedente, e che perciò la proporzione enunciata è generalmente vera.

Nel terminare questa succinta esposizione delle principali proprietà delle proporzioni, ci piace di avvertire i giovani, che questa teoria è tutt'altro che arida e sterile, come per avventura potrebbe ad essi sembrare. L'uti-

lità e l'importanza delle proporzioni si renderà ognor più manifesta, a misura che progrediremo nello studio delle Matematiche. Ma intanto potremo averne un saggio in ciò che ci resta a dire per compiere gli elementi dell'Aritmetica.

Regola del Tre.

*139. Si dà il nome di *regola del tre* a quella la quale, dati che siano tre termini di una proporzione, insegna a trovare il quarto termine proporzionale, che può essere tanto uno dei termini medj, come uno degli estremi. Noi abbiamo già indicata la via che deve tenersi per determinare il termine incognito di una proporzione (132. II.ª); cosicchè qui ci resta soltanto a parlare delle condizioni che deve avere un quesito, affinchè possa risolversi con la regola del tre, e dell'ordine secondo il quale debbon disporsi i termini della proporzione a cui il quesito stesso dà luogo.

*140. Ogni proporzione essendo l'eguaglianza di due rapporti, e un rapporto non potendo esistere altro che tra due quantità della medesima specie, ne segue; 1.° che un quesito risolubile per mezzo di una proporzione, ossia con la regola del tre, deve contenere nel suo enunciato tre termini esprimenti altrettante quantità note, e proporre la ricerca di una quarta quantità: 2.° che dei tre termini dati due debbono essere tra loro *omogenei* (107), e che l'altro, a cui daremo il nome di *solitario*, deve essere omogeneo al termine incognito: 3.° e che infine deve risultar chiaramente dalla natura del quesito la necessità che il rapporto di due degli omogenei eguagli quello degli altri due. Un quesito nel quale non si verificassero tutte insieme queste condizioni essenziali non potrebbe tradursi in una proporzione, nè in conseguenza potrebbe risolversi con la regola del tre.

Supponiamo che si domandi: quanto costeranno 48 braccia di panno, sapendosi che braccia 12 di quel medesimo panno costano 96 lire? In questo quesito abbiamo tre termini noti, cioè 48, 12, 96; i primi due sono omogenei, perchè esprimono unità di braccia; il solitario è omogeneo all'incognito, perchè questo dovrà manifestamente esprimere come il solitario un certo numero di lire. È inoltre evidente che il valore di 48 braccia di panno dovrà risultare tanto più grande di quello di 12 braccia, quanto 48 è più grande di 12; vale a dire che il prezzo di 48 braccia, ossia l'incognito, dovrà contenere il prezzo di 12 braccia, ossia il solitario 96 lire, lo stesso numero di volte che 48 contiene 12. Si ha dunque manifestamente la proporzione $x:96::48:12$, dalla quale risulterà $x=\frac{96\times48}{12}=384$ numero delle lire corrispondente al prezzo delle 48 braccia di panno.

*141. Verificata che sia nell'enunciato di un quesito l'esistenza delle condizioni che ne fanno dipendere la soluzione dalla regola del tre, per saper assegnare a ciascun termine il posto che gli compete nella proporzione

da istituirsi, rifletteremo; che la disposizione dei termini dovrà farsi in maniera che ambedue gli antecedenti siano respettivamente omogenei ai loro conseguenti, affinchè possano dare due rapporti (140), e che di più siano ambedue maggiori o ambedue minori dei conseguenti stessi, affinchè i due rapporti risultino eguali e diretti, e così possan formare una proporzione (128). Si rende perciò manifesto che dopo avere stabilito uno dei rapporti tra due degli omogenei, per esempio tra quelli cogniti, non può procedersi a stabilire il rapporto degli altri due, cioè del solitario e dell' incognito, se prima non si conosca qual debba essere il maggiore di questi due termini, e quale per conseguenza debba all'altro preporsi, perchè il loro rapporto sia direttamente eguale a quello dei primi. A quest'effetto giova osservare: 1.° che l'enunciato di un quesito di regola del tre comprende sempre due parti, l'una affermativa, interrogativa l'altra: 2.° che l'interrogazione cade su quella di queste due parti che comprende uno dei due omogenei dati e l'incognito: 3.° che l'omogeneo senza interrogazione è in corrispondenza col solitario nello stesso modo che l'omogeneo con interrogazione lo è con l'incognito. Ciò premesso, non s'incontra la minima difficoltà a riconoscere che qualora, aumentando o diminuendo l'omogeneo con interrogazione, ne segua per l'indole del quesito un aumento o una diminuzione nel termine corrispondente, cioè nell'incognito, i quattro termini saranno tra loro in ragione diretta (127); e che i termini stessi saranno in ragione inversa tra loro (*ivi*), se succeda il contrario, vale a dire, se aumentando o diminuendo l'omogeneo con interrogazione, ne derivi invece una diminuzione o un aumento nel termine incognito. La regola del tre si dice *diretta* quando si verifica il primo di questi due casi, *inversa* quando ha luogo il secondo. Potremo adunque, nel disporre i termini della proporzione, stabilire il primo rapporto anteponendo in ogni caso l'omogeneo senza interrogazione a quello con interrogazione; ma nel secondo rapporto dovremo anteporre il solitario all'incognito, se la regola del tre è diretta, e al contrario anteporre l'incognito al solitario, se è inversa. Ma passiamo agli esempj.

Es. I. 30 uomini hanno costruito 72 metri di un muro d'uniforme grossezza in un certo tempo: quanti uomini ne costruiranno 480 metri nello stesso tempo? Qui gli omogenei cogniti sono 72 e 480, il solitario è 30, e la regola del tre è manifestamente diretta, poichè crescendo l'omogeneo con interrogazione, che nell'attual quesito è 480, cresce la quantità del lavoro e quindi dovrà crescere proporzionalmente anche il numero degli uomini che in quel dato tempo debbon compirlo. Sicchè si scriverà $72:480::30:x$, ed operando secondo i precetti già stabiliti (132. II.ª), si troverà $x=\frac{480\times30}{72}=200$.

Es. II. I viveri che si trovano in una fortezza basterebbero a 2500 soldati per 4 mesi: si domanda per quanto tempo potrebbero bastare a 3240 soldati. In questo quesito l'incognito è un certo numero di mesi, ed è poi chiaro che un tal numero dovrà essere tanto minore di 4, quanto 3240 sol-

dati son più di 2500. Dunque il rapporto di 4 ad x, cioè del solitario all'incognito, è inverso al rappòrto dell'omogeneo senza interrogazione a quello con interrogazione, a quello cioè di 2500 a 3240; e quindi converrà rovesciare uno di questi rapporti (129) per poterne dedurre la proporzione. Avremo perciò $2500:3240::x:4$, e di qui $x=\frac{2500\times4}{3240}=3\frac{7}{81}$, ossia 3 mesi e poco più di 2 giorni.

Sarà utile l'osservare che prima di procedere alla determinazione del termine incognito, è bene di render più semplici, qualora si possa, i termini della proporzione; il che ha luogo ogniqualvolta un medio e un estremo son divisibili esattamente per un medesimo numero (135. V.ª). Così nella proporzione $72:480::30:x$, avremmo potuto successivamente dividere il 1.° e il 3.° termine per 6, e il 1.° e 2.° per 12; ciò che avrebbe dato $1:40::5:x$ proporzione molto più semplice della precedente. Del pari, dopo aver soppresso uno zero a destra del 1.° e del 2.° termine della proporzione $2500:3240::x:4$, avremmo potuto dividere i conseguenti per 4, e ne sarebbe risultata l'altra $250:81::x:1$.

*142. Talvolta la soluzione di un quesito esige il concorso di più proporzioni. Questo succede quando son date più coppie di omogenei invece di una soltanto, e quando per conseguenza il rapporto del solitario all'incognito dipende da un maggior numero di circostanze che tutte debbono essere valutate. Basteranno gli esempj che seguono a far conoscere il metodo da praticarsi per risolvere un quesito qualunque di questo genere.

I. Si domanda quante miglia percorrerebbe in 15 giorni, camminando 8 ore per giorno, un viaggiatore che, camminando 7 ore per giorno, ne ha percorse 210 in 12 giorni. Il numero delle miglia che qui si cerca, dipende evidentemente in parte dalla variazione del numero dei giorni nei quali il viaggiatore cammina, e in parte dalla variazione del numero delle ore che dura il cammino in ciascun giorno. Cominciamo dal mettere in conto il cambiamento del numero dei giorni, e per adesso fatta astrazione da quello delle ore, cerchiamo quante miglia farà in 15 giorni il supposto viaggiatore, sapendosi che ne ha fatte 210 in 12 giorni. Avremo così da risolvere un quesito di regola del tre semplice, e nel caso nostro diretta; perchè più sono i giorni, più saranno le miglia percorse. Stabilita perciò la proporzione $12:15::210:x$, otterremo, dopo avere schisati gli antecedenti per 6, $x=\frac{15\times35}{2}$ e potremo omettere le riduzioni, giacchè questo non è il valore definitivo dell'incognita del quesito proposto. Adesso per mettere in conto il cambiamento delle ore, basterà trovare quante miglia farà il viaggiatore camminando 8 ore per giorno, sapendosi che camminando 7 ore per giorno, farebbe un numero di miglia espresso da $\frac{15\times35}{2}$. E siccome abbiamo anche qui, come è facile a rilevarsi, un caso di regola del tre semplice e

diretta, rappresentando l'incognita con y, dovrà porsi $7:8::\frac{15\times35}{2}:y$; d'onde risulterà $y=\frac{8\times15\times35}{2\times7}=300$ numero cercato delle miglia.

II. Supposto che 24 operaj, lavorando 9 ore per giorno, abbiano impiegati 42 giorni a scavare un canale avente 150 braccia di lunghezza, 12 di larghezza e 5 di profondità; voglia sapersi quanti giorni sarebbero necessarj a 56 operaj che lavorassero 10 ore per giorno, a scavare un altro canale lungo 500 braccia, largo 16 e profondo 7.

Cominciamo dall'aver riguardo soltanto al cambiamento del numero degli operaj, sciogliendo il quesito: quel lavoro che han fatto 24 operaj in 42 giorni, in quanti giorni lo faranno a parità di circostanze 56 operaj? Siccome il tempo scema a misura che cresce il numero degli operaj, la regola del tre applicabile a questa ricerca è inversa (141), e conseguentemente avremo, rappresentando con u il termine incognito, $24:56::u:42$, ciò che dà $u=18$. Passando a valutare l'effetto del maggior numero di ore che giornalmente impiegano nel lavoro gli operaj della seconda mandata, e riflettendo che se 56 di essi lavorando 9 ore per giorno, impiegano 18 giorni a compire il lavoro, lo compiranno più presto, qualora lavorino invece un maggior numero di ore per giorno, avremo la proporzione $9:10::v:18$ dalla quale ricavasi il valore dell'incognita $v=\frac{81}{5}$. Ci resta ora a far caso delle variate dimensioni del canale. Gli operaj che impiegano giorni $\frac{81}{5}$ a scavare un canale della lunghezza di 150 braccia, impiegheranno certamente un tempo maggiore a scavarne uno che abbia maggior lunghezza, cioè 500 braccia; dunque $150:500::\frac{81}{5}:x$ o meglio, tolta la frazione (135. V.ª), $750:500::81:x$, proporzione che dà $x=54$. L'aumento della larghezza del canale esige del pari un aumento di tempo; per valutare questa circostanza, dovrà porsi $12:16::54:y$, e così otterremo $y=72$. In ultimo per valutare l'aumento di tempo che consegue dalla maggior profondità del secondo canale in confronto di quella del primo, dovrà istituirsi la proporzione $5:7::72:z$, dalla quale si dedurrà $z=\frac{504}{5}=100\frac{4}{5}$; e questo numero che risulta dal concorso di tutte le circostanze espresse nell'enunciato del proposto quesito, indicherà il numero dei giorni che voleva conoscersi.

*143. Esaminando ora l'indole e l'andamento delle operazioni che abbiamo eseguite nei due esempj precedenti, apparisce chiaramente, che per risolvere un quesito di regola del tre composta, fa d'uopo dedurre da esso e risolvere tanti quesiti di regola del tre quante sono le coppie di omogenei che il quesito stesso contiene, cioè; che primieramente bisogna stabilire tra due degli omogenei dati e il solitario una regola del tre diretta o inversa, secondochè porta la natura del quesito ridotto a questi tre termini

solamente; che quindi devesi stabilire una seconda proporzione con altri due degli omogenei dati e col risultato della precedente; che in seguito ne va formata una terza con altri due omogenei e col risultamento della seconda; e che così dee proseguirsi finchè tutte le coppie degli omogenei dati non siano esaurite. Il termine che si trova con l'ultima di queste regole è quello che risolve il quesito.

*144. Se si riprendono le proporzioni avute dal secondo dei due esempj addotti di sopra (142), e se dopo avere sostituite in ognuna di esse le lettere u, v, x, y in luogo dei numeri 18, $\frac{81}{5}$, 54, 72 che ne sono i respettivi valori, si dispongono come qui di contro; moltiplicando tra loro le prime due ed omettendo u che verrebbe moltiplicatore di un medio e di un estremo, avremo la 6.ª; moltiplicando pure tra loro la 3.ª, 4.ª e 5.ª, ed omettendo x ed y che risulterebbero egualmente moltiplicatori di un medio e di un estremo, otterremo la 7.ª; dividendo infine la 7.ª per la 6.ª, e passando moltiplicatore del terzo termine il numero 42, che risulterebbe divisore del quarto termine, otterremo la proporzione 8.ª la quale non conterrà altro che la sola incognita del quesito. Dunque per risolvere un quesito di regola del tre composta, non è necessario determinare il valore delle incognite intermediarie, ma basta semplicemente impostare le proporzioni, e quindi dividere il prodotto di quelle che spettano a regole del tre dirette, per il prodotto di quelle che appartengono a regole del tre inverse, e infine dedurre dalla proporzione che ne risulta il valore dell'unica incognita che vi rimane e che unicamente importa conoscere.

1.ª $24 : 56 :: u : 42$
2.ª $9 : 10 :: v : u$
3.ª $150 : 500 :: v : x$
4.ª $12 : 16 :: x : y$
5.ª $5 : 7 :: y : z$

6.ª $24\times 9 : 56\times 10 :: r : 42$
7.ª $150\times 12\times 5 : 500\times 16\times 7 :: r : z$
8.ª $\frac{150\times 12\times 5}{24\times 9} : \frac{500\times 16\times 7}{56\times 10} :: 42 : z$

Dalla regola del tre si deducono pressochè tutte le regole superiori dell'Aritmetica, quali sono *la falsa posizione*, *le regole di interesse*, *di sconto*, *di alligazione*, *di società*, ec. Noi peraltro crediamo opportuno premettere all'esposizione di queste regole i principj del calcolo algebrico, sia perchè allora potremo trattarne in un modo più generale e conseguentemente più esatto e più rigoroso, sia perchè alcune di esse suppongono delle dottrine che l'Algebra insegna con semplicità, concisione ed esattezza che mal si otterrebbero dall'Aritmetica.

ELEMENTI D' ALGEBRA.

145. Tutte le cifre aritmetiche, o prese isolatamente, o comunque combinate fra loro, hanno un valor determinato atto ad indicare una data e precisa riunione di quantità, e non altra che quella. Così il 3, il 58 indicano 3 unità, 58 unità, ma non possono rappresentarne nè cento, nè mille. Quindi è che l'Aritmetica può bensì giungere a farci conoscere i rapporti individuali che passano fra numero e numero, e mostrarci le particolari proprietà spettanti a quello, o a questo di essi: ma comecchè mancante di simboli idonei a rappresentare in generale una quantità qualunque, non può svelarci i rapporti e le proprietà spettanti a tutti i numeri in comune, e meno ancora indagare quali fra tutti i numeri, ad esclusione dell'intera immensità dei rimanenti, abbiano un dato rapporto, o sieno dotati della tale o tale altra proprietà. E se pure la vediamo impegnarsi talvolta in queste indagini, ed in qualche modo riescir nell'intento, ciò accade o in forza dei numerosi e ciechi tentativi a cui assoggetta il calcolatore; o in virtù di metodi artificiosi, che da non molto tempo ha adottati, estranei per altro ai suoi principj, nè tratti dal suo proprio fondo; o per l'abuso in fine a questa scienza familiarissimo di concludere dal particolare al generale.

Frattanto le indagini di cui parliamo, estese non solo ai numeri, ma ad ogni altra specie di quantità sono di un'importanza gravissima in tutte le matematiche, e ne formano anzi il principale e più nobile scopo. Per giungervi in una maniera ragionata e soddisfacente, e supplire al vuoto immenso, che l'Aritmetica in questa parte lasciava, fu dunque primieramente necessario immaginare simboli di più esteso significato, e atti a rappresentare non quella o questa quantità, come le cifre aritmetiche, ma tutte le quantità in generale, e in seguito abbisognò creare una nuova scienza, che insegnasse ad usarne, a sottoporgli alle leggi del calcolo, e ad interpetrare il misterioso linguaggio delle loro finali combinazioni. Questa scienza fu l'*Algebra*, che valutata in principio come semplice appendice dell'Aritmetica, ma per altro chiamata fin d'allora, per antonomasia, *Arte magna*, spiegò ben presto, per opera specialmente degl'Italiani, le immense sue forze, e in breve si palesò quale uno dei più fecondi ed utili ritrovamenti dell'umano ingegno. I simboli, per uso di questa scienza introdotti, furono le lettere di qualunque alfabeto; il che fu ideato con ottimo divisamento, perchè essendo quelle già conosciute, la loro introduzione non veniva ad aggravar la memoria, come avvenuto sarebbe, se preferiti si fossero invece segni di qualunque altra arbitraria configurazione. Del resto non è nuovo l'uso delle lettere alfabetiche per indicare

quantità: ebbe in antico vigore fra quasi tutte le nazioni, come ne abbiamo prova presso gli Ebrei, Greci e Romani; con la differenza però che mentre per esempio fra i Romani le lettere I, V, X, L, C, D, M, rappresentavano esclusivamente **1**, **5**, **10**, **50**, **100**, **500**, **1000**, nell'Algebra tanto queste, quanto tutte le rimanenti rappresentano indistintamente e genericamente qualunque quantità, e ciò che di ciascuna di esse si enuncia, s'intende enunciato d'ogni e qualunque numero.

Tutto ciò si comprenderà meglio in appresso: ma forse i due seguenti saggi potranno intanto utilmente servire, almeno per i più intelligenti, a far prender fin d'ora una qualche prima idea dello spirito di questa scienza, e della sua superiorità sulla volgare Aritmetica.

Se si sommano i tre numeri consecutivi **5**, **6**, **7** si ha **18** triplo del medio **6**; se si sommano i tre parimente consecutivi **9**, **10**, **11** si ha **30** triplo del medio **10**; come pure se si sommano i tre consecutivi **15**, **16**, **17** si ha **48** triplo del medio **16**. Da questi e da altri simili esempj che potrebbero a piacere moltiplicarsi, l'Aritmetico trae che la somma di tre numeri consecutivi è sempre tripla del medio; modo di ragionare non abbastanza retto, perchè da ciò che vedesi accadere in più casi non può legittimamente dedursi che lo stesso accaderà in tutti gli altri.

L'Algebra non ragiona così: ma comincia dal rappresentare con m il numero medio, qualunque questo esser possa. Quindi riflettendo che il precedente deve avere un'unità di meno, il susseguente una di più, conclude che il primo sarà dunque ben rappresentato da $m-1$, il secondo da $m+1$. La somma di questi tre numeri disposti secondo il loro ordine naturale sarà perciò $m-1+m+m+1$: e poichè il -1 del primo vien distrutto visibilmente dal $+1$ dell'ultimo, resterà dunque $m+m+m$ riunione di tre numeri tutti eguali ad m, e corrispondenti perciò al triplo di m (**19**), cioè al triplo del medio, come doveva dimostrarsi.

Venga proposto di trovare fra tutti i numeri quello il cui doppio e il cui triplo sommati facciano **100**. L'Aritmetico è obbligato ad andar tentando e cercare il numero richiesto fra tutti quelli minori di **100**: e il solo esame attento degli errori a cui lo hanno condotto le sue prime supposizioni, potrà servirgli di qualche lume per accostarsi più al vero nelle seconde. L'Algebrista all'opposto, sicuro che qualunque siasi il numero cercato, non può non essere rappresentato con x, simbolo generale che tutti quanti i numeri rappresenta, lo chiama x, e conclude che $2x$ ne sarà il doppio, $3x$ il triplo, e $5x$ la proposta somma del doppio e del triplo, che deve dunque essere eguale a **100**. Or se $5x$ eguaglia **100**, x quantità cinque volte minore eguaglierà la quinta parte di **100**, cioè **20**, che sarà dunque il numero cercato. E infatti il doppio di **20** che è **40**, e il triplo che è **60**, sommati fanno **100**.

La scelta d'una lettera piuttosto che d'un'altra per rappresentare la quantità che ci occorre è indifferente, tutte avendo la stessa virtù di rappresentare qualunque numero. Bensì se i ragionamenti cadono non sopra una, ma sopra più quantità differenti fra loro, ognuna di queste dovrà esser rappresentata

con lettere diverse; o volendone introdurre una sola, il che giova talvolta, siccome vedremo, alla maggior simmetria dell' espressioni, ed anche a sollevar la memoria, deve nei diversi casi distinguersi o con un apice in alto, o con un indice numerico in basso alla destra, scrivendo per esempio A', A'', A''', ec., oppure A_1, A_2, A_3, ec. che si leggono *A prima*, *A seconda*, *A terza* ec.

Nozioni Preliminari.

146. Si chiamano *espressioni algebriche* quelle nelle quali entrano comunque, e in qualsivoglia numero, lettere denotanti quantità; e si rappresentano con quei medesimi segni che abbiamo adoperati nell'Aritmetica, le diverse operazioni che posson farsi su queste espressioni; così per sommare a, b, si scrive $a+b$; per sottrarre c da d, si scrive $d-c$; per esprimer b eguale ad a, si scrive $b=a$. La moltiplicazione di p per q si indica con $p\times q$, o con $p.q$, anzi si stima fatta quando una lettera è seguita da una o più altre senza interruzione di segni: così $pq=p\times q$, $abc=a\times b\times c$. La divisione di a per b si accenna con $\frac{a}{b}$ o con $a:b$.

147. Si chiama *monomio* o *termine* ogni espressione non interrotta dai segni $+$, $-$. Si chiama *binomio*, *trinomio* ec. la riunione di due, tre, ec. termini; e in generale più termini riuniti diconsi *polinomio*.

148. I termini sono o *positivi* o *negativi*; quelli son preceduti dal $+$, questi dal $-$, con che si indica che gli uni sono opposti agli altri nel loro modo di esistere; così se un credito si nota col $+$, un debito dovrà notarsi col $-$: se una linea che da un punto va a destra o all'insù, si riguarda come positiva: un'altra che dal punto stesso vada a sinistra o all'ingiù, dovrà riguardarsi come negativa. Quando un monomio, o il primo termine d'un polinomio non ha segno, si ha per positivo.

149. Spesso concorrono termini eguali in un polinomio, come $a+a+a-b-b+d$: allora si scrivono una sola volta: segnando con un numero a sinistra quante volte s'intendono ripetuti. Quindi $a+a+a-b-b+d$ diventa $3a-2b+d$. La cifra che in tal caso precede le lettere, si chiama *coefficiente;* se ella manchi, il coefficiente è 1 che sempre in questo caso va sottinteso. I coefficienti possono essere anche frazionarj come in $\frac{3}{4}a$, $\frac{5}{2}ab$: ed indicano in tal caso che quella quantità algebrica alla quale appartengono non è presa interamente o più volte, ma nel modo bensì conforme al significato della frazione. Così $\frac{3}{4}a$ indica *tre quarti di a*, vale a dire tre volte la quarta parte di a. È poi chiaro che le espressioni $\frac{3}{4}a$ e $\frac{3a}{4}$ equivalgono. Infatti

$\frac{3a}{4}$ indica *tre a diviso per 4*, cioè la quarta parte di $3a$, e per conseguenza esprime una quantità tre volte maggiore di $\frac{1}{4}a$, come l'esprime $\frac{3}{4}a$.

150. Una quantità moltiplicata per sè stessa una, due, tre volte ec., come aa, prodotto di a per a, aaa prodotto di aa per a ec., si scrive una sola volta, e con una cifra a destra ed in alto si accenna quante volte ella dovrebbe effettivamente esser segnata: così a^2 è un compendio di aa, $a^3=aaa$, $a^4=aaaa$, ec. Queste cifre in alto diconsi *esponenti*, nè bisogna confonderle coi coefficienti; i coefficienti indican somma, e gli esponenti moltiplicazione; così $3a=a+a+a$, mentre $a^3=aaa$, e se $a=5$, viene $3a=15$ ed $a^3=125$. Se l'esponente manchi, egli è l'unità, così $bc=b^1c^1$, $ab^2c=a^1b^2c^1$. Talvolta l'esponente è zero, che all'opposto degli altri indica non la ripetuta presenza, ma anzi l'esclusione assoluta della lettera che ne va affetta, di modo che il termine va valutato come se questa lettera non vi fosse. Così $3az^0$ vale per $3a$; $5z^0$ per 5, e z^0 per l'unità, suo coefficiente sottinteso. Spesso, siccome vedremo, la comparsa di questi esponenti è opera del calcolo; spesso ancora vengono introdotti per simmetria. Vi sono pure esponenti frazionarj come $3a^{\frac{1}{2}}$, e negativi come $7a^{-2}$, dei quali daremo in seguito il significato.

151. Si dicon *simili* i termini con le stesse lettere, ed ognuna con lo stesso esponente, vale a dire i termini che diversificano soltanto nei coefficienti e nei segni: tali sono $a^3b^2c, -5a^3b^2c, \frac{1}{4}a^3b^2c$, come pure $\frac{a^2b}{2c^2d}, \frac{3a^2b}{2c^2d}, -\frac{4a^2b}{3c^2d}$; e allorchè hanno luogo più termini simili in un medesimo polinomio si riducono tutti in un solo, apponendogli per nuovo coefficiente o la somma dei loro coefficienti se son tutti positivi o negativi, o la differenza fra le somme dei positivi e dei negativi, quando ve ne sieno dell'una specie e dell'altra. Così $a^3b^2c+3a^3b^2c+5a^3b^2c=9a^3b^2c$; $2a^5b^3c^2-3a^5b^3c^2-4a^5b^3c^2+8a^5b^3c^2=10a^5b^3c^2-7a^5b^3c^2=3a^5b^3c^2$. Parimente $q^2+3y+4q^2-8y=5q^2-5y$; $\frac{1}{4}m^2n-\frac{3}{4}p^3+c-\frac{5}{8}p^3+p^3+\frac{3}{4}m^2n=m^2n-\frac{3}{8}p^3+c$. Talvolta la somma dei coefficienti positivi eguaglia quella dei negativi; in tal caso il coefficiente del nuovo termine sarebbe zero, cioè il termine svanisce, nè ha luogo nell'espressione ridotta. Così $8a^2+7c+a^2-9a^2-7c=0$.

152. Oltre le lettere, gli esponenti ed i coefficienti, si distinguono nei termini algebrici anche le *dimensioni*, che corrispondono al numero delle lettere eguali o ineguali contenute in ciascun termine. Così $4z$, $3a$ sono della prima dimensione; $5yz$, $3a^2$ sono della seconda; a^3, y^2z, xyz della terza, ec. Spesso però nel determinare la dimensione non si ha riguardo che ad alcune delle lettere: così ay^2z che sarebbe per sè medesimo della quarta dimensione, divien della terza relativamente alle sole lettere y, z.

153. Allorchè non si ha riguardo che ad una, o ad alcune delle lettere componenti un termine, tutte le quantità sì numeriche che algebriche che

le accompagnano, prendono per estensione il nome di *coefficiente;* se non che, per non confonderlo col semplice coefficiente numerico, gli si appone, occorrendo, l'aggiunto *totale*. Così in $4a^2bz$, si considera $4a^2b$ come coefficiente totale di z, e in $\frac{3y^2z}{4a}$ si considera $\frac{3}{4a}$ come coefficiente di y^2z. Le quantità alle quali si ha una speciale attenzione chiamansi *principali*, le altre *secondarie*. I termini che hanno le stesse lettere principali, respettivamente affette dagli stessi esponenti si considerano come simili (151), comunque abbian diverse le lettere secondarie. Così in $a+4ay^2z-5by^2z$ i due ultimi termini son simili rapporto ad y^2z. Per ridurgli si raccolgono e si includono dentro parentesi i coefficienti totali coi loro segni, e al di fuori si pongono le lettere principali. In tal guisa l'espressione precedente diverrà $a+(4a-5b)y^2z$.

154. Del pari quando in un monomio o in un polinomio non si ha riguardo che ad una lettera, come x, o a due o a tre, come x, y, o come x, y, z, il monomio o il polinomio si chiamano *funzioni di* x, *funzioni di* x, y, *funzioni di* x, y, z, ec. Così $3ax$, $4ax^2-bx+c$ sono funzioni di x; $3xy$, $5x^2+4xy+y^2+cx+gy+p$ sono funzioni di x, y, ec. Si rappresenta in generale una funzione di x, di x, y, ec. scrivendo $\varphi(x)$, $\varphi(x.y)$, ec. oppure $f(x)$, $f(x,y)$ o similmente. Si distinguono poi con uno o più apici sopra il φ, o sopra la f le funzioni differenti d'una lettera stessa.

155. Un polinomio si dice *ordinato* quando tutti i suoi termini son disposti in modo che la lettera principale abbia nel primo il più grande esponente, e negli altri abbia esponenti di mano in mano sempre minori. Il maggiore esponente determina il *grado* del polinomio. Così il trinomio $y^4-3a^2y^2+by$ vedesi ordinato per y, ed è del quarto grado. Il polinomio è *completo*, quando ordinato che sia, gli esponenti della lettera principale vanno gradatamente diminuendo di una sola unità dal primo termine fino all'ultimo, nel quale la lettera ridotta all'esponente zero non comparisce (150). Tale sarebbe il quinquinomio $y^4-3ay^3+5a^2y^2+8aby-5a^2$. In tal caso è manifesto che il numero dei termini viene a superare d'un'unità il grado del polinomio o il valore del primo e massimo esponente. Così nel polinomio allegato, del quarto grado, contansi cinque termini. Infine un polinomio è *omogeneo* quando tutti i suoi termini hanno la medesima dimensione (152), come sarebbe, $x^2+xy+3z^2$.

Addizione algebrica.

156. Per sommar due o più espressioni algebriche basta scriverle l'une dopo l'altre coi loro segni, e farne la riduzione se ha luogo: così la somma di cdn o $4m^2$ è $cdn+4m^2$; quella di $ab+c^6$ ed $u-t-c^6$ è $ab+u-t$; quella di $2m+3n-q$ e $q-2m-3n$ è zero.

'**157.** Quando le quantità che debbono esser sommate contengono dei termini simili, torna comodo disporle le une sotto le altre in maniera che i ter-

mini simili corrispondano in una medesima colonna verticale. Siano, per esempio, da sommarsi le quantità $5a^4-3a^2b^2+7a^2b^3-8a^2$, $-9a^2b^3-11a^4+10a^2-6cd$, $3a^2b^2+4cd-5a^2+6a^4$, $16a^2b^3+a^2b^2-4a^2$. Scriveremo come di contro i dati polinomj, e condotta una linea che separi da essi il loro risultato, ridurremo a parte i coefficienti di ciascuna colonna. E siccome si trova

$$\begin{array}{rrrrr} 5a^4 & -3a^2b^2 & +7a^2b^3 & -8a^2 & \\ -11a^4 & & -9a^2b^3 & +10a^2 & -6cd \\ +6a^4 & +3a^2b^2 & & -5a^2 & +4cd \\ & +a^2b^2 & +16a^2b^3 & -4a^2 & \\ \hline & a^2b^2 & +14a^2b^3 & -7a^2 & -2cd \end{array}$$

$5-11+6=0$, $-3+3+1=1$, $7-9+16=14$, $-8+10-5-4=-7$, $-6+4=-2$, concluderemo che la somma richiesta è espressa da $a^2b^2+14a^2b^3-7a^2-2cd$.

*158. Le frazioni algebriche si sommano precisamente nel medesimo modo delle frazioni numeriche, vale a dire si riducono allo stesso denominatore, qualora di già non lo abbiano, e si pone il denominatore comune sotto la somma dei numeratori. Così dovendo sommare $\frac{5a}{17b}$, $-\frac{10a}{17b}$, $\frac{3a}{17b}$, avremo $\frac{5a}{17b}-\frac{10a}{17b}+\frac{3a}{17b}=\frac{5a-10a+3a}{17b}=-\frac{2a}{17b}$. Se invece si volesse la somma delle frazioni $\frac{5x}{4m}$, $-\frac{2y}{3m}$, $-\frac{x}{6m}$, si ridurrebbero prima col noto metodo (56) al comun denominatore $12m$, quindi sommando e riducendo, si avrebbe $\frac{5x}{4m}-\frac{2y}{3m}-\frac{x}{6m}=\frac{15x-8y-2x}{12m}=\frac{13x-8y}{12m}$.

Sottrazione algebrica.

*159. Per sottrarre b da a, basta scrivere, come abbiam detto (146), $a-b$. Ma se dovesse sottrarsi da a la quantità negativa $-b$, dovrebbe scriversi invece $a+b$. Infatti b e $-b$ essendo due quantità direttamente opposte nel loro modo di esistere (148), è certo che la sottrazione di una di esse da a deve produrre un effetto contrario a quello che deriva dalla sottrazione dell'altra: or siccome a diminuisce per la sottrazione di b, diventando $a-b$, dovrà dunque aumentare per la sottrazione di $-b$, e perciò diventare $a+b$. Se poi invece di b volesse sottrarsi da a la quantità $b-c$, dovrebbe manifestamente aversi un resto tanto maggiore di $a-b$, quanto $b-c$ è minore di b; sicchè il risultato della sottrazione sarebbe $a-b+c$. Dunque in ogni caso *per eseguire la sottrazione algebrica, fa d'uopo cambiare i segni alla quantità sottraenda e scriverla di seguito alla quantità dalla quale deve sottrarsi.*

*160. Supponiamo, per applicare la regola ad un esempio, che si debba sottrarre $11px-15t^2-rz-7mn$ da $3mn-5px+rz-8t^2$. Osservando che le quantità date contengono dei termini simili, scriveremo la quantità sottraenda, nel tempo stesso che le si cambiano i segni, non in linea ma al disotto della quantità dalla quale vogliamo sottrarla, e in modo che i termini simili cor-

rispondano gli uni sotto gli altri, come abbiamo fatto per l'addizione, e come qui di contro apparisce. Procedendo quindi alla riduzione, troveremo il resto $10mn-16px+2rz+7t^2$.

$$\begin{array}{r} 3mn-\ \ 5px+\ rz-\ \ 8t^2 \\ +\ 7mn-11px+\ rz+15t^2 \\ \hline 10mn-16px+2rz+\ \ 7t^2 \end{array}$$

*161. La sottrazione dei rotti algebrici si effettua come quella dei rotti numerici. Così per sottrarre $\frac{2a}{9b}$ da $\frac{4a-5b}{9b}$, prima si scrive $\frac{4a-5b}{9b}-\frac{2a}{9b}$, e quindi avvertendo che $9b$ è divisor comune, si ottiene $\frac{4a-5b-2a}{9b}$, ossia, riducendo i termini simili, $\frac{2a-5b}{9b}$.

Moltiplicazione algebrica.

162. Se un monomio debba moltiplicarsi per un altro monomio si comincerà dallo stabilire il segno che deve darsi al prodotto; su di che terremo per regola che due fattori di segno eguale danno un prodotto positivo, di segno diverso lo danno negativo, o per usar la frase ordinaria: che *più in più dà più, in meno dà meno; meno in più dà meno, in meno dà più*. Così $a\times b=ab$ (146), $a\times-b=-ab$, $-a\times b=-ab$, $-a\times-b=ab$.

*Per intendere facilmente che il prodotto delle due quantità a e b deve avere, in conformità della regola sopra enunciata, il medesimo segno del moltiplicando allorchè il moltiplicatore ha il segno + espresso o sottinteso, e che il prodotto stesso deve avere il segno contrario a quello del moltiplicando, allorchè il moltiplicatore è preceduto dal segno —, bisogna riflettere che moltiplicare per $+b$ una data quantità, vale prenderla o sommarla b volte *positivamente*, cioè, nel modo in cui esiste, ossia col segno che ha; e che moltiplicare per $-b$ una data quantità, significa prenderla o sommarla b volte *negativamente*, vale a dire in un modo contrario a quello in cui esiste, ossia col segno cambiato.

*163. Stabilito il segno che deve avere il prodotto di due monomj, *si moltiplicano l' uno per l' altro i due coefficienti numerici, si dispongono secondo l' ordine alfabetico le lettere dei due fattori, serbando ad esse i loro esponenti, eccettuate peraltro quelle che si trovassero tanto nel moltiplicando quanto nel moltiplicatore, perchè queste dovranno scriversi una volta sola e con un esponente eguale alla somma degli esponenti che hanno nei due fattori.* Così troveremo $3a^2b^2c\times-6a^2b=-18a^4b^3c$. Per rendersi ragione di questa regola basta avvertire che il prodotto richiesto deve contenere tutti i fattori esistenti nei dati monomj, che questi fattori possono cambiarsi di posto, e che se una data quantità trovasi come fattore m volte nel moltiplicando ed n volte nel moltiplicatore, dovrà comparire $m+n$ volte nel loro prodotto. Per tal modo $7a^3b^2mx^4\times5a^4bx^3z$ dà $7\times5a^3a^4b^2bmx^4x^3z$ $=35a^7b^3mx^7z$.

*164. Passiamo alla moltiplicazione dei polinomj; e in primo luogo supponiamo che vogliasi moltiplicare $a+b$ per $m+n$, il che si accenna scrivendo $(a+b)(m+n)$. In questo caso dovremo, come è evidente, sommare $a+b$ tante volte quante sono le unità rappresentate da m, più tante volte quante sono le unità rappresentate da n, e quindi sommare i prodotti. Ma per sommare m volte $a+b$, bisogna sommare m volte ossia moltiplicare per m tanto a che b, e ciò dà $am+bm$; e del pari per sommare n volte $a+b$, bisogna sommare n volte ossia moltiplicare per n tanto a che b, e ciò dà $an+bn$: dunque avremo $(a+b)(m+n)=am+bm+an+bn$. Supponiamo in secondo luogo che debba moltiplicarsi $a-b$ per $m+n$. Qui dovrà sommarsi m volte più n volte la quantità $a-b$, e in conseguenza ognuno dei suoi termini, cioè tanto a che $-b$. Ora a e $-b$ sommati m volte, danno manifestamente $am-bm$, e gli stessi termini sommati n volte, danno $an-bn$; dunque riunendo questi prodotti, risulterà $(a-b)(m+n)=am-bm+an-bn$. Supponiamo in terzo luogo che abbiasi da moltiplicare $a+b$ per $m-n$. In questo caso la quantità $a+b$, deve esser sommata un numero di volte espresso da m diminuito di n. Sommando m volte $a+b$, risulta $am+bm$ e questo prodotto contiene visibilmente $a+b$ n volte più del dovere, poichè $a+b$ deve esser preso non m volte, ma $m-n$ volte. Se dunque da $am+bm$ si tolga n volte $a+b$, ossia $an+bn$, il che esige un cambiamento di segni nei due termini da sottrarsi (159), si avrà il prodotto richiesto, e perciò $(a+b)(m-n)=am+bm-an-bn$. Supponiamo infine che si cerchi il prodotto di $a-b$ per $m-n$. Ragionando in questo caso come nel precedente, verremo a concludere che il prodotto cercato risulterà sottraendo da $a-b$ sommato m volte, ossia da $am-bm$, la quantità $a-b$ presa n volte, ossia $an-bn$; e quindi eseguita la sottrazione verrà $(a-b)(m-n)=am-bm-an+bn$.

Se ora ravviciniamo, come di fianco, i risultati delle precedenti moltiplicazioni, per farne più facilmente il confronto; si renderà manifesto, che tutti questi prodotti risultano dal moltiplicare successivamente i termini del moltiplicando per quelli del moltiplicatore, e dal riunire in un sol polinomio i prodotti parziali provenienti da tali moltiplicazioni con i segni che ad essi respettivamente competono, in conformità della regola che abbiamo stabilita di sopra (162).

$$(a+b)(m+n)=am+bm+an+bn$$
$$(a-b)(m+n)=am-bm+an-bn$$
$$(a+b)(m-n)=am+bm-an-bn$$
$$(a-b)(m-n)=am-bm-an+bn$$

Di qui possiamo concludere che in generale *si moltiplicano tra loro due polinomj moltiplicando, secondo la regola data per i monomj* (163), *l'un dopo l'altro tutti i termini del primo per ciascun termine del secondo, e formando un sol polinomio con la riunione di tutti i prodotti che ne risultano*. Infatti se dovesse, per esempio, moltiplicarsi $a-b+c-d$ per $m+n-p$, rappresentando con x il valore di $a-b$, con y quello di $c-d$ e con z quello di $m+n$, tutto si ridurrebbe a moltiplicare tra loro i binomj $x+y$ e $z-p$; il che darebbe $(x+y)(z-p)=xz+yz-px-py$; e rimettendo i termini rappresen-

tati da x, y e z; $(a-b+c-d)\ (m+n-p)=(a-b)\ (m+n)+(c-d)\ (m+n)-p$ $(a-b)-p(c-d)=am-bm+an-bn+cm-dm+cn-dn-ap+bp-cp+dp$, come appunto si avrebbe applicando immediatamente la sopra enunciata regola generale.

*165. Prima di procedere ad altre applicazioni, è bene avvertire che spesso nella moltiplicazione dei polinomj hanno luogo dei termini simili. In previsione di questo caso, giova non poco ordinare per una medesima lettera i due polinomj (155) prima di moltiplicarli; e i prodotti parziali di tutto il moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore si scrivono gli uni sotto gli altri in maniera che i termini simili, se ne risulteranno, si corrispondano in colonna. Ciò premesso, si voglia il prodotto di $5a+3c-d$ per $6a-7d$. Imposto l'operazione come di fianco, e moltiplico primieramente per $6a$ prima $5a$, poi $+3c$, quindi $-d$, ed ho i tre prodotti $5a\times 6a=30a^2$, $3c\times 6a=18ac$, $-d\times 6a=-6ad$. Scritti questi prodotti sotto una linea che li separi dai polinomj dati, passo in seguito a moltiplicare ognuno dei termini $5a$, $+3c$, $-d$ per $-7d$, e ottengo i prodotti $-35ad$, $-21cd$, $+7d^2$, che scrivo sotto i precedenti in guisa che $-35ad$ sia sottoposto al termine simile $-6ad$. Riduco, ed ho $30a^2+18ac-41ad-21cd+7d^2$ che è il prodotto cercato.

$$\begin{array}{r} (5a+3c-d)\ (6a-7d) \\ \hline 30a^2+18ac-\ 6ad\qquad\qquad\qquad \\ -35ad-21cd+7d^2 \\ \hline 30a^2+18ac-41ad-21cd+7d^2 \end{array}$$

Si debba inoltre moltiplicare $a^3-2ab^2+3b^3-4a^2b$ per a^2+2b^2-3ab. Ordinati per a e disposti come di contro i due polinomj, moltiplico ad uno per volta tutti i termini del moltiplicando per il primo del moltiplicatore, e segno in una medesima linea procedente da sinistra a destra i prodotti che ne provengono. Passo quindi a moltiplicare di nuovo per il secondo termine del moltiplicatore tutti quelli del moltiplicando, e mano a mano che ottengo i prodotti li segno in una seconda linea, andando da sinistra a destra e ponendo i termini simili sotto i termini simili. In seguito faccio i prodotti di tutti i termini del moltiplicando per l'ultimo del moltiplicatore, e li segno in una terza linea che proceda nel medesimo senso delle due precedenti; ed eseguita in fine la riduzione, trovo che $a^5-7a^4b+12a^3b^2+a^2b^3-13ab^4+6b^5$ è il prodotto richiesto.

$$\begin{array}{l} (a^3-4a^2b-\ 2ab^2+3b^3)\ (a^2-3ab+2b^2) \\ \hline a^5-4a^4b-\ 2a^3b^2+3a^2b^3 \\ \qquad -3a^4b+12a^3b^2+6a^2b^3-9ab^4 \\ \qquad\qquad\qquad +\ 2a^3b^2-8a^2b^3-4ab^4+6b^5 \\ \hline a^5-7a^4b+12a^3b^2+\ a^2b^3-13ab^4+6b^5 \end{array}$$

*166. Riflettendo che la moltiplicazione di un polinomio per un altro polinomio si riduce in sostanza a prender la somma di tutti i prodotti, che nascono dal moltiplicare ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo, potremo dedurne le conseguenze che appresso.

I.ª Se i due polinomj sono omogenei (155), anche il loro prodotto è omogeneo, e se siano m ed n le respettive dimensioni (152) dei termini del mol-

tiplicando e dei termini del moltiplicatore, $m+n$ è la dimensione dei termini del prodotto. Ciò vedesi verificato nei due esempj addotti di sopra. Infatti nel primo esempio ove i due fattori sono omogenei e i termini della prima dimensione, il prodotto è parimente omogeneo e i suoi termini sono della seconda dimensione. Nel secondo esempio tutti i termini del prodotto sono della quinta dimensione, perchè erano della terza dimensione tutti i termini del moltiplicando, e della seconda tutti i termini del moltiplicatore.

II.ª Il massimo numero di termini che possa avere il prodotto di due polinomj eguaglia il prodotto del numero dei termini del moltiplicando per il numero dei termini del moltiplicatore, ed ha luogo, come è evidente, quando i prodotti parziali risultano tutti dissimili.

III.ª Il prodotto di due polinomj, l'uno del grado m (155) l'altro del grado n, e della forma $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+$ ec. $+rx+t$, $a_1x^n+b_1x^{n-1}+c_1x^{n-2}+d_1x^{n-3}+$ ec. $+r_1x+t_1$, ove a, a_1, b, b_1, c, c_1, ec. rappresentano dei coefficienti numerici o algebrici, è un polinomio del grado $m+n$ e della forma $Ax^{m+n}+Bx^{m+n-1}+Cx^{m+n-2}+$ ec. $+Rx+T$. Se si eseguisse infatti la moltiplicazione dei due polinomj, tra tutti i prodotti parziali che ne proverrebbero la lettera x avrebbe il massimo esponente $m+n$ nel primo, in quello cioè che avrebbesi dalla moltiplicazione di ax^m per a_1x^n; la stessa lettera x avrebbe l'esponente zero, ossia non comparirebbe affatto nell'ultimo termine, vale a dire in quello risultante dalla moltiplicazione di t per t_1: e nei termini intermedj avrebbe ognuno degli esponenti interi possibili tra $m+n$ e zero, cioè l'esponente $m+n-1$, nei due termini provenienti dal moltiplicare bx^{m-1} per a_1x^n ed ax^m per b_1x^{n-1}, l'esponente $m+n-2$ nei tre termini derivanti dal prodotto di cx^{m-2} per a_1x^n, di bx^{m-1} per b_1x^{n-1} e di ax^m per c_1x^{n-2}, e così di seguito. Effettuando adunque la riduzione dei termini simili, ossia riunendo in un sol termine quelli che contengono x^{m+n-1}, in uno quelli che contengono x^{m+n-2}, in uno quelli che contengono x^{m+n-3}, ec., ne risulterà evidentemente un polinomio del grado $m+n$ e della forma sopraindicata.

Qui peraltro è da avvertirsi che qualora uno dei polinomj abbia qualche termine negativo, il loro prodotto potrebbe mancare di alcuni termini e così non riuscire un polinomio completo. Offrono due esempj importanti di questa eccezione i prodotti di $x+a$ per $x-a$, e di $x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+$ ec. $+x^2+x+1$ per $x-1$. Moltiplicando infatti $x+a$, per $x-a$, si ottiene $x^2+ax-ax-a^2$, ovvero x^2-a^2 giacchè i termini $+ax$ e $-ax$ si distruggono: dunque $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$, e perciò *il prodotto della somma di due quantità nella loro differenza eguaglia la differenza dei loro quadrati.* Moltiplicando successivamente prima per x e poi per -1 il polinomio completo $x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+$ ec. $+x^2+x+1$, il prodotto risultante dalla prima moltiplicazione sarà $x^m+x^{m-1}+x^{m-2}+$ ec. $+x^3+x^2+x$, vale a dire sarà un polinomio avente tutti i termini del moltiplicando, eccettuato l'ultimo, e di più il termine x^m; il prodotto derivante dalla seconda

moltiplicazione sarà $-x^{m-1}-x^{m-2}-x^{m-3}-$ ec. $-x^2-x-1$, vale a dire equivarrà al moltiplicando stesso con tutti i suoi segni cangiati di positivi in negativi: dunque riunendo i prodotti delle due moltiplicazioni, risulterà $(x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+$ ec. $+x^2+x+1)(x-1)=x^m-1$. Di qui si deduce che $x-1$ è fattore esatto di x^m-1, e che in conseguenza *qualunque potenza* x^m *diminuita di un' unità è multipla della sua radice* x *diminuita egualmente di un' unità.*

167. Qualora abbiansi da moltiplicare più polinomj come $y+a$, $y+b$, $y+c$, ec. scriveremo $(y+a)(y+b)(y+c)$ ec., e quindi si moltiplicheranno i due primi, poi il loro prodotto per il terzo, ec. conforme s' insegnò per lo stesso caso nell' aritmetica (22. 7°). E qui luogo è di avvertire che i polinomj, allorchè inclusi sono dentro parentesi, figurano nelle espressioni quasi fossero semplici lettere. Così posti l'uno presso l'altro, s' intendon moltiplicati tra loro; aver possono i loro esponenti, come $(a+b)^3$, il che significherebbe il prodotto di tre binomj eguali ad $a+b$; hanno i loro coefficienti, come $2(a+b)^3$, e son positivi o negativi secondo che si trovan preceduti o dal segno + espresso o sottinteso, o dal segno —. Ed in essi pure quando l'esponente o il coefficiente manchino, devesi sottintendere per l'uno e per l'altro l'unità.

168. Di qui intanto deriva 1.° che essendo $-(a-y)=-1\,(a-y)$, si avrà effettuando la moltiplicazione $-(a-y)=-a+y$, e perciò *è lecito cangiare i segni a tutti i termini di un polinomio, purchè s' includa dentro parentesi*, e *gli si annetta al di fuori il segno negativo* e reciprocamente. Quindi 2.° $(a-b)(c-d)=-(b-a)\times-(d-c)$: e poichè questi due fattori negativi danno il prodotto positivo $(b-a)(d-c)$, sarà dunque $(a-b)(c-d)=(b-a)(d-c)$: perciò *dati due fattori polinomj da moltiplicarsi, sarà lecito cangiare i segni a tutti i termini dell'uno, purchè si cangino anche a quelli dell' altro.* Questa regola si estende visibilmente anche al caso che uno dei fattori sia monomio. Se si abbia un maggior numero di fattori, i segni potranno cangiarsi contemporaneamente o a due, o a quattro, o ad un qualunque numero pari di essi: ma non a tre, a cinque ec. Onde se i fattori sono in numero impari, uno almeno di essi dovrà lasciarsi coi proprj segni.

*169. Moltiplicando tra loro n binomj della forma $x+a, x+b, x+c$; ec. cioè dei binomj che tutti abbiano eguale il primo termine e differente il secondo, il prodotto che ne risulta è il polinomio $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+$ ec. $+N$, ove A rappresenta la somma dei secondi termini dei binomj, B rappresenta la somma dei prodotti degli stessi termini moltiplicati due a due, C rappresenta la somma dei prodotti dei medesimi termini moltiplicati tre a tre, ec. e infine N rappresenta il prodotto di tutti i secondi termini. Ciò si deduce, argomentando per analogia, dall' andamento secondo il quale procédono i prodotti che si ottengono col moltiplicare, in conformità della regola sopra stabilita, due, tre, quattro ec. di detti binomj come qui appresso si vede.

$$\frac{(x+a)\,(x+b)}{\begin{array}{l} x^2+ax+ab \\ \quad +bx \end{array}} \qquad \frac{(x+a)\,(x+b)\,(x+c)}{\begin{array}{l} x^3+ax^2+abx+abc \\ \quad +bx^2+acx \\ \quad +cx^2+bcx \end{array}} \qquad \frac{(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)}{\begin{array}{l} x^4+ax^3+abx^2+abcx+abcd \\ \quad +bx^3+acx^2+abdx \\ \quad +cx^3+bcx^2+acdx \\ \quad +dx^3+adx^2+bcdx \\ \qquad +bdx^2 \\ \qquad +cdx^2 \end{array}}$$

Ma per dimostrare in una maniera più generale l'esistenza di questa legge, supponiamo di averla verificata col fatto nella moltiplicazione degli $n-1$ binomj $x+a$, $x+b$, $x+c$, ec. $x+m$, e che perciò siasi ottenuto il prodotto $x^{n-1}+A_1x^{n-2}+B_1x^{n-3}+C_1x^{n-4}+$ ec. $+M_1$ ove A_1, B_1, C_1, ec. M_1 rappresentano respettivamente le somme dei secondi termini a, b, c, ec. m, e dei loro prodotti due a due, tre a tre, ec. Se moltiplichiamo per un nuovo binomio $x+n$, otterremo

$$\frac{(x^{n-1}+A_1x^{n-2}+B_1x^{n-3}+C_1x^{n-4}+\text{ ec. }+M_1)(x+n)}{\begin{array}{l} x^n+A_1x^{n-1}+B_1x^{n-2}+C_1x^{n-3}+\text{ ec. }+M_1x \\ \quad +nx^{n-1}+nA_1x^{n-2}+nB_1x^{n-3}+\text{ ec. }+nL_1x+nM_1 \end{array}}$$

$$x^n+(A_1+n)x^{n-1}+(B_1+nA_1)x^{n-2}+(C_1+nB_1)x^{n-3}+\text{ ec. }+(M_1+nL_1)x+M_1n.$$

Se or si esamini questo prodotto, si intenderà facilmente che il coefficiente A_1+n è la somma di tutti gli n secondi termini dei binomj $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... $x+m$, $x+n$; che B_1+nA_1 è la somma degli stessi termini moltiplicati due a due; che C_1+nB_1 è la somma dei loro prodotti di tre a tre, ec.; e che in ultimo M_1n è il prodotto dei medesimi secondi termini. Dunque esiste nel prodotto degli n binomj quella medesima legge che esiste nel prodotto di $n-1$ degli stessi binomj, cosicchè essa legge deve verificarsi per un qualsivoglia numero di binomj, ed è perciò generale.

170. I rotti algebrici si moltiplicano come i numerici (62). Così $\frac{a}{b}\times\frac{4}{z}=\frac{4a}{bz}$; $\frac{c}{d}\times\frac{m+n}{p+q}=\frac{cm+cn}{dp+dq}$; $\frac{2x}{5z}\times 10xy=\frac{20x^2y}{5z}=\frac{4x^2y}{z}$.

Divisione Algebrica.

171. Se le quantità algebriche da dividersi l'una per l'altra sono ambedue monomie, si comincerà dal determinare il segno del quoziente dietro il principio, che se il dividendo ha il segno medesimo del divisore, il quoziente è positivo, se diverso, il quoziente è negativo; o come suol dirsi, che *+ diviso per + dà +, per — dà —; — diviso per + dà —, per — dà +.* Infatti supposto m il prodotto di a in b, onde sia 1.ª $ab=m$, e perciò 2.ª $-a\times-b=ab$ (162) $=m$, e 3.ª $-a\times b=-ab=-m$, dalla 1.ª si avrà $\frac{m}{b}=a$ (29. 4.°), positiva; dalla 2.ª $\frac{m}{-b}=-a$, negativa; dalla 3.ª $\frac{-m}{b}=-a$, negativa, e $\frac{-m}{-a}=b$, positiva.

172. Stabilito il segno, ecco come otterremo il quoziente. *Si porrà il divisore sotto il dividendo in forma di rotto; si ridurranno i coefficienti numerici, quando si possa* (57), *fra loro; e infine si toglieranno le lettere comuni ai due termini se sono con esponente eguale, e se lo hanno diverso si toglieranno dal termine ove lo hanno minore, e si lasceranno nell' altro, ma con esponente eguale alla differenza dei due primitivi.* Così troveremo $3a^2bc^3 : 9ab^2c^4 = \frac{3a^2bc^3}{9ab^2c^4}$ $= \frac{a}{3bc}$; $8a^3b^3c : -4ab^3c^2 = -\frac{2a^2}{c}$; $2a^2c : 3ac = \frac{2a}{3}$. Infatti i due termini del rotto $\frac{2a^2c}{3ac}$ hanno per elementi o fattori comuni a, c: posson questi dunque togliersi dall' uno e dall' altro (52) senza alterare il rotto, che allora diviene $\frac{2a}{3}$. Così si ragioni sugli altri esempj.

173. Si osservi 1.° che se la regola precedente porti a dover togliere le lettere tutte del numeratore, nè queste abbiano alcun coefficiente numerico espresso, converrà lasciare in loro luogo il coefficiente 1, che non può in quel caso rimaner più sottinteso (149). Così $\frac{a^2b^2c}{3a^3b^3c^3}$ si farà $= \frac{1}{3abc^2}$. Avvenendo però il caso opposto non sarà necessario lasciar l' unità nel denominatore: così avendosi $\frac{2ab^2c^3}{bc^3}$ porremo $2ab$ e non $\frac{2ab}{1}$.

2.° Se la lettera comune ad ambedue i termini abbia esponenti algebrici, è in libertà di lasciarla nell' uno o nell' altro. Così in luogo di $\frac{a^m}{a^n}$ potrà scriversi a^{m-n}, oppure $\frac{1}{a^{n-m}}$. Anzi questa medesima libertà si estende pure al caso degli esponenti numerici, purchè si avverta al segno dovuto alla lor differenza, che dovrà esser negativo quando voglia lasciarsi la lettera nel termine ov' ha l' esponente minore. Così si farà $\frac{3a^2bc}{4a^5c^2} = \frac{3b}{4a^3c} = \frac{3}{4}a^{-3}bc^{-1}$. Tuttociò è stabilito da ricevuta convenzione.

174. Di qui 3.° poichè $\frac{3b}{4a^3c}$ e $\frac{3a^{-3}b}{4c}$ sono equivalenti, *potrà* dunque *trasferirsi una lettera da un termine all' altro del* rotto, *purchè se ne cangi il segno all' esponente.* Perciò $a^{-m} = \frac{a^{-m}}{1} = \frac{1}{a^m}$, cioè 4.° *ogni quantità con esponente negativo rappresenta l' unità divisa per la quantità stessa con l' esponente reso positivo.* Inoltre $\frac{a^m}{a^m} = a^m \times a^{-m} = a^{m-m} = a^0$: onde 5.° *ogni quantità con l' esponente zero rappresenta il quoziente che darebbe divisa per sè medesima, cioè l' unità*; il che è pienamente conforme a quanto altrove dicemmo relativamente a questi esponenti (150). Infatti se in $3az^0$ si ha $z^0 = 1$, è chiaro che $3az^0 = 3a$.

175. I polinomj si dividono come i numeri composti nell'Aritmetica (35), ma prima si ordinano per una lettera stessa il dividendo e il divisore. Così se debbo dividere $12a^3b^2+a^2b^3-7a^4b-13ab^4+6b^5+a^5$ per $3b^3-4a^2b+a^3-2ab^2$, ordino per a, con che il dividendo diviene $a^5-7a^4b+12a^3b^2+a^2b^3-13ab^4+6b^5$, e il divisore $a^3-4a^2b-2ab^2+3b^3$.

Ciò eseguito, cerco come nella divisione numerica, quella quantità che moltiplicata per il primo termine a^3 del divisore dà di prodotto il primo termine a^5 del dividendo, ossia divido questo per quello, ed ho $\frac{a^5}{a^3}=a^2$, che pongo per primo termine del quoziente. Quindi moltiplico questo primo termine per tutto il divisore, e con le solite regole (159) ne sottraggo il prodotto dal dividendo; il che fatto, ho di resto $-3a^4b+14a^3b^2-2a^2b^3-13ab^4+6b^5$.

Su questo resto rinnuovo coll'ordine stesso l'operazione: divido cioè il primo termine $-3a^4b$ per il solito a^3 primo termine del divisore, ed ho $\frac{-3a^4b}{a^3}=-3ab$, secondo termine del quoziente. Per esso moltiplico il divisore, sottraggo dal resto avuto il prodotto, ed ho di 2.° resto $2a^3b^2-8a^2b^3-4ab^4+6b^5$.

Proseguendo nel modo stesso, divido per il solito a^3 il primo termine $2a^3b^2$ di questo resto, ed ho $\frac{2a^3b^2}{a^3}=2b^2$, terzo termine del quoziente; e come il prodotto di questo nel divisore sottratto dal resto precedente non dà avanzo alcuno, il calcolo è terminato. Eccone per esteso il prospetto.

	$a^2-3ab+2b^2$
$a^3-4a^2b-2ab^2+3b^3$	$a^5-7a^4b+12a^3b^2+a^2b^3-13ab^4+6b^5$
1.° prodotto sottratto	$-a^5+4a^4b+2a^3b^2-3a^2b^3$
1.° resto	$-3a^4b+14a^3b^2-2a^2b^3-13ab^4+6b^5$
2.° prodotto sottratto	$+3a^4b-12a^3b^2-6a^2b^3+9ab^4$
2.° resto	$2a^3b^2-8a^2b^3-4ab^4+6b^5$
3.° prodotto sottratto	$-2a^3b^2+8a^2b^3+4ab^4-6b^5$
3.° resto	0

Moltiplicando il quoziente totale avuto per il divisore, torna il dato dividendo. Dunque l'operazione è sicura (29).

***176.** In generale per dividere l'uno per l'altro due polinomj, *si comincia dall'ordinarli ambedue per una medesima lettera, e quindi si divide il primo termine del dividendo per il primo del divisore, mediante la nota regola* (172); *il quoziente che si ottiene in tal modo è il primo termine del quoziente generale. In seguito per questo termine si moltiplica il divisore, e sottraendone il prodotto dal dividendo, si ha un resto polinomio il di cui primo termine diviso per il primo del divisore, somministra il secondo del quoziente. Sottratto il prodotto del divisore per il secondo termine trovato dal resto pre-*

cedente, si ha un nuovo resto polinomio che serve come il primo alla determinazione del terzo termine del quoziente. Proseguendo ad operare in questa maniera si trovano ad uno per volta tutti i termini del quoziente e si giunge ad un resto finale che è zero, se il divisore è un fattore esatto del dividendo, e che in caso diverso è un polinomio nel quale la lettera ordinatrice ha il massimo esponente minore di quello dal quale è affetta la stessa lettera nel primo termine del divisore.

Infatti siccome il quoziente deve esser tale che moltiplicato per il divisore e aggiunto al prodotto il resto, se pure avrà luogo, riproduca il dividendo, ne segue che il dividendo stesso è il prodotto di ciascun termine del quoziente per ciascun termine del divisore, più il resto; e siccome d' altronde il dividendo e il divisore sono ordinati per la medesima lettera, ne segue ancora che il primo termine del dividendo è unicamente il prodotto del primo termine del divisore moltiplicato per il primo termine del quoziente (166. III.ª). Dunque dalla divisione del primo termine del dividendo per il primo del divisore, deve necessariamente risultarne il primo termine del quoziente; e se per questo termine si moltiplica il divisore e se ne sottra il prodotto dal dividendo, il resto non può essere altro che il prodotto del divisore per la rimanente parte del quoziente. Ragionando ora su questo resto, ossia su questo nuovo dividendo come sul dividendo primitivo, viene in simil guisa a concludersi che dividendone il primo termine, quello cioè ove la lettera ordinatrice ha il più grand' esponente, per il primo termine del divisore, deve risultarne il secondo termine del quozicnte, ed un secondo resto che, trattato come il primo, darà il terzo termine del quoziente, ec.

*177. Oss. I.ª Se rapporto alla lettera ordinatrice il dividendo sia del grado $m+n$ e il divisore del grado m, il quoziente sarà rapporto alla stessa lettera del grado n, e il resto non potrà oltrepassare il grado $m-1$: imperciocchè ammettendo che il quoziente riuscisse del grado p diverso da n, il suo prodotto pel divisore riuscirebbe (166. III.ª) del grado $m+p$ anzichè del grado $m+n$; ed ammettendo che il resto della divisione risultasse di un grado eguale o maggiore di $m-1$, ne verrebbe che la divisione potrebbe ancora continuarsi e che quindi un tal resto non sarebbe più l' ultimo. Dovendo essere il quoziente un polinomio del grado n, ne segue che il numero dei suoi termini sarà in generale $n+1$ (155).

*178. II.ª Quando il dividendo non è un multiplo del divisore, e quindi dà luogo ad un resto finale diverso da zero, fa d' uopo completare il quoziente con l' aggiunta di una frazione avente per numeratore il resto della divisione e per denominatore il divisore, come si pratica nella divisione dei numeri (28). Si potrebbe anche continuare la divisione: ma siccome non s' incontrerebbe mai un resto zero nè vi sarebbe più un limite che terminasse l' operazione; ovunque questa si arrestasse dovrebbe sempre aggiungersi a destra del quoziente l' ultimo resto con sotto il divisore. Così, dovendo dividere per $x-a$ il quadrinomio $x^3-5ax+4a^2+a$, dopo avere ot-

tenuti in quoziente i due termini x, $-4a$ e il resto a, dovrebbe scriversi a destra del quoziente la frazione $\frac{a}{x-a}$. Ma volendo continuare la divisione, si dividerà a per x e ne risulterà evidentemente il termine frazionario $\frac{a}{x}$, che scritto in quoziente, e sottrattone il prodotto da a condurrà al nuovo resto $\frac{a^2}{x}$. Diviso questo per x ne proverrà (67) il termine $\frac{a^2}{x^2}$, ed il resto $\frac{a^3}{x^2}$, che alla sua volta dovrebbe esser diviso per x. Terminando a questo punto l' operazione, il quoziente completo sarà $x-4a+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3:x^2}{x-a}$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-4a+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3:x^2}{x-a} \\
\hline
 & x^2-5ax+4a^2+a \\
x-a & -x^2+ax \\
\hline
 & -4ax+4a^2+a \\
 & +4ax-4a^2 \\
\hline
 & +a \\
 & -a+\frac{a^2}{x} \\
\hline
 & +\frac{a^2}{x} \\
 & -\frac{a^2}{x}+\frac{a^3}{x^2} \\
\hline
 & +\frac{a^3}{x^2}
\end{array}
$$

179. III.ª Il prodotto del divisore per le quantità che si vanno volta per volta segnando in quoziente, può dar luogo a qualche termine non simile a veruno di quelli che si trovano o nel dividendo o nei resti. Questo si porrà allora di seguito o all' uno o agli altri in ultimo luogo; ma continuando la divisione si avvertirà di considerarlo come primo qualora la lettera per cui si è ordinato, abbia in esso un esponente maggiore che negli altri. Si veda l'esempio qui apposto.

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2-am+m^2 \\
\hline
 & a^3+m^3 \\
a+m & -a^3 \quad -a^2m \\
\hline
1.^{\circ}\ \text{resto} & 0+m^3-a^2m \\
 & +a^2m+am^2 \\
\hline
2.^{\circ}\ \text{resto} & +m^3 \quad 0 \quad +am^2 \\
 & -m^3 \quad\quad -am^2 \\
\hline
 & 0 \quad\quad 0
\end{array}
$$

180. Allorchè il primo termine del divisore B ha un coefficiente c non summultiplo di quello del primo termine del dividendo A, il quoziente ed i resti risultano frazionarj, e l' operazione riesce fastidiosissima. Potremo evitare la noia se supposto n il numero dei termini dovuto al quoziente (177. I.ª), moltiplicheremo il dividendo A per c^n, e divideremo infine per c^n il quoziente completo ottenuto. Infatti cangiandosi il dividendo A in Ac^n, crescerà pure nello stesso rapporto il quoziente: convien dunque dividerlo per c^n, affinchè sia ridotto al suo vero valore. D'altra parte è visibile, che per natura dell' operazione e dell'ipotesi, il primo termine del nuovo quoziente risulta multiplo di c^{n-1}: dunque altrettanto avverrà del primo resto, come per eguali ragioni i successivi resti risulteranno respettivamente multipli di c^{n-2}, c^{n-3}, c^{n-4}.... Quindi niuno dei quozienti che parzialmente

si ottengono dalle successive divisioni di ciascun resto per B risulterà frazionario.

Che se c^n fosse un numero troppo grande, potremo semplicemente moltiplicare in principio A per c, e quindi di nuovo per c ciascuno dei resti a misura che vanno ottenendosi; se non che in luogo di dividere per c^n tutto il quoziente, dovremo allora dividere per c il primo termine, per c^2 il secondo, ec.; e l' ultimo soltanto col resto finale per c^n. Infatti il dividendo A non essendo moltiplicato che per c, darà nella prima divisione un quoziente ed un resto soltanto c volte più grande del vero; dunque il primo termine del quoziente non dovrà dividersi che per c. Il resto nuovamente moltiplicato per c, diverrà c^2 volte più grande del giusto, e darà del pari un quoziente ed un resto c^2 volte maggiore del vero: il secondo termine del quoziente dovrà dunque dividersi per c^2; e così per le stesse ragioni dovranno dividersi rispettivamente per c^3, c^4, ec. i quozienti successivi, e per c^n il resto finale.

181. Se la lettera ordinatrice abbia coefficienti algebrici (153), la divisione può riuscire assai più laboriosa del solito, in quantochè la riduzione dei termini simili, che ha luogo appena fatta la sottrazione dei prodotti, può spesso esigere l' applicazione del metodo accennato al num. 153, con che cangiandosi in polinomj i nuovi coefficienti dei resti, il calcolo successivo perde moltissimo della sua naturale facilità. Se ne prenderà agevolmente un' idea dall' esempio, benchè semplicissimo, che qui di fianco poniamo. Vero è che con qualche piccola industria la complicazione può molto diminuirsi. Eccone un saggio nella ricerca seguente, la quale è inoltre per sè medesima di grande importanza, ed avremo occasione di farne assai buon uso in appresso.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+A-a \\
\hline
x+a \,/ & x^2+Ax+b \\
 & -x^2-ax \\
\hline
 & 0 \quad x(A-a)+b \\
 & -x(A-a)-a(A-a) \\
\hline
 & \qquad\qquad b-a(A-a)
\end{array}
$$

Debba dividersi per $x-a$ il polinomio $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+Dx^{m-4}+$ ec.... $+Tx^2+Zx+\Omega$, ordinato per x e completo, e in conseguenza con $m+1$ termini (153). In luogo di operare col metodo precedente, che in questo caso riescirebbe complicatissimo, se per comodo di calcolo, avuto il primo termine del quoziente e il primo resto, si ponga A_1 in luogo di $a+A$, ottenuto il secondo si ponga A_2 in luogo di aA_1+B, ottenuto il terzo si ponga A_3 in luogo di aA_2+C, e così successivamente A_4 in luogo di aA_3+D, A_5 in luogo di aA_4+E, otterremo in primo luogo in quoziente $x^{m-1}+A_1x^{m-2}+A_2x^{m-3}+A_3x^{m-4}+$ ec.... $+\frac{A_m}{x-a}$, ove abbiamo posto A_m per numeratore del rotto, ossia per resto finale della divisione (30), in quanto che nei casi particolari di $m=1$, $m=2$, $m=3$, ec. si troverà, come può agevolmente verificarsi, essere A_1, A_2, A_3, ec.; d' onde è manifesto che nel caso di m qualunque, sarà legittimamente rappresentato con A_m.

Ciò fatto, per passare dal quoziente così avuto a quello che ottenuto si sarebbe, usando il metodo di divisione ordinario, altro non resterà che trovare e restituire in luogo delle quantità A_1, A_2, A_3 ec. introdotte ausiliarmente, i loro effettivi valori. Ora, poichè abbiamo posto A_1 in luogo di $a+A$, sarà dunque $A_1=a+A$, come per la stessa ragione $A_2=Aa_1+B, A_3=Aa_2+C$, ec: e poichè A_1 entra nel valore di A_2, A_2 in quello di A_3 ec., sostituendo gli uni negli altri questi valori ed effettuando le convenienti moltiplicazioni, avremo

$$A_1=a+A$$
$$A_2=Aa_1+B=a(a+A)+B=a^2+Aa+B$$
$$A_3=Aa_2+C=a(a^2+Aa+B)+C=a^3+Aa^2+Ba+C$$
$$A_4=Aa_3+D=a(a^3+Aa^2+Ba+C)+D=a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D$$

valori di cui è assai chiaro l'andamento, e che facilmente possono continuarsi a piacere, anche senza aiuto di calcolo, attesa appunto la legge manifesta con cui procedono, osservandovisi 1.° che tutti sono ordinati per a; 2.° che il massimo esponente di a corrisponde in ciascuno all'indice da cui sono respettivamente affette le A; 3.° che i coefficienti A, B, C, D ec. sono gli stessi e in egual modo disposti che quelli del polinomio dato, e ne sono uno in A_1, due in A_2, tre in A_3, di maniera che può concludersi, che continuando si troverebbe

$$A_5=a^5+Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E$$
$$A_6=a^6+Aa^5+Ba^4+Ca^3+Da^2+Ea+F$$
ec. ec.

Ed anzi potremo anche giungere fino ad assegnare la forma del resto finale A_m, che secondo le precedenti leggi dovrà cominciare con a^m, avere $m+1$ termini, quanti perciò ne ha il polinomio dato, e quindi tutti i coefficienti A, B, C ec. del medesimo, dal primo A fino all'ultimo Ω. Sarà dunque $A_m=a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+Ca^{m-3}+$ ec. $+Ta^2+Za+\Omega$, cioè lo stesso che il dividendo dato, cangiatovi x in a.

182. Spesso è dato un prodotto che bisogna risolvere nei suoi fattori. Quando uno di questi sia monomio, si ritroverà facilmente osservando ciò che ciascuno dei termini ha di comune cogli altri, sia nei fattori dei coefficienti, sia nelle lettere e loro respettivi esponenti. Così in $9a^3b^3-18a^2b^5+15a^4b^4-3a^2b^3$ vedo che ogni coefficiente è multiplo di 3, e che in ciascun termine è contenuto il prodotto a^2b^3. Concludo che $3a^2b^3$ è fattore di tutta l'espressione. Divido allora per $3a^2b^3$, ed ho per l'altro fattore $3a-6b^2+5a^2b-1$. Sarà dunque il polinomio dato $=3a^2b^3\ (3a-6b^2+5a^2b-1)$, come può verificarsi eseguendo la moltiplicazione. Ma se ambedue i fattori son polinomj, non vi è regola generale per rintracciarli: insegneremo altrove come possono aversi in certi casi più semplici.

Talvolta il metodo precedente di riduzione è applicabile ad una sola parte del polinomio; ed allora si eseguisce ove si può, lasciando il resto nello stato suo primitivo. Così il fattore già avuto $3a-6b^2+5a^2b-1$ si cangia in $a(3+5ab)-6b^2-1$; quindi tutta la data espressione potrà ridursi a

$3a^2b^3(a(3+5ab)-6b^2-1)$. Queste forme sono nei più dei casi assai comode, e sempre eleganti e preferite, specialmente se si tratti di risultamenti finali.

183. La divisione dei rotti algebrici per interi o per altri rotti, o d'un intero per un rotto, si eseguisce come nei numeri (67): così si divide $\frac{m}{n}$ per $\frac{s}{t}$ scrivendo $\frac{mt}{ns}$: si divide $\frac{b}{c}$ per $4m$ scrivendo $\frac{b}{c.4m}=\frac{b}{4cm}$; si divide x per $\frac{p}{q}$ scrivendo $\frac{qx}{p}$; si divide $\frac{a-x}{b-x}$ per a scrivendo $\frac{a-x}{a(b-x)}$. E qui osserverò di passaggio, che potendo farsi (168), $a-x=-(x-a)$, $b-x=-(x-b)$, sarà $\frac{a-x}{a(b-x)}=\frac{-(x-a)}{-a(x-b)}=$(171) $\frac{x-a}{a(x-b)}$; e perciò *in qualunque rotto algebrico potremo cangiare i segni del numeratore o di un suo fattore qualunque, purchè si cangin quelli del denominatare o di uno qualunque dei suoi fattori.*

184. Questi rotti si riducono poi all'espressione più semplice, decomponendo nei loro fattori il dividendo e il divisore, e togliendone i comuni ad ambedue (57): così, poichè $x^2+px=x(x+p)$, e $bmx+bmp=bm(x+p)$, sarà $\frac{x^2+px}{bmx+bmp}=\frac{x(x+p)}{bm(x+p)}=\frac{x}{bm}$. Generalmente però converrà ricorrere, come si fa per i numeri (57), alla regola del massimo comun divisore (46). Ma l'applicazione di questa regola al caso dei polinomj, esige delle considerazioni speciali, dipendenti dalla natura delle espressioni algebriche.

185. La determinazione del massimo comun divisore di due polinomj, che rappresenteremo l'uno, cioè il maggiore, con A, e l'altro con B, e che supporremo ordinati per una medesima lettera, dipende dal principio; *che ogni divisore esatto di* A *e di* B *è anche divisore esatto del resto* R *della loro divisione, e che il massimo comun divisore di* A *e di* B *è identico a quello di* B *e di* R. Questo principio fu dimostrato nell'Aritmetica (46), ma non sarà inutile che qui nuovamente si provi per far conoscere, se non altro, quanto giovino i simboli algebrici a rendere i ragionamenti chiari e concisi a un tempo medesimo Sia dunque D il massimo comun divisore di A e di B, e supponiamo che sia contenuto m volte in A ed n volte in B, per modo che abbiasi $A=mD$, $B=nD$. Rappresentando con Q la parte intera del quoziente di A diviso per B, si avrà (29. 1.°) $A=BQ+R$, ossia sostituendo ad A e a B i loro valori, $mD=nDQ+R$, e dividendo da ambedue le parti per D, $m=nQ+\frac{R}{D}$. Ma m ed nQ sono quantità intere, e perchè l'eguaglianza sussista bisogna che sia intera anche la quantità $\frac{R}{D}$; dunque D dovrà essere un divisore esatto di R. Sia ora D_1 il massimo comun divisore di B e di R, p e q i quozienti esatti di B e di R divisi per D_1. Ripresa l'eguaglianza $A=BQ+R$ e divisala per D_1, ne risulterà $\frac{A}{D_1}=pQ+q$, ed $\frac{A}{D_1}$ dovrà essere una quantità intera. Dunque D_1 è un divisore esatto di A. Rimane a provarsi che D è eguale a D_1. A questo effetto suppongasi D maggiore di D_1:

siccome il massimo comun divisore di A e di B deve dividere esattamente R, ne verrà che B ed R hanno per fattor comune D maggiore di D_1, cioè maggiore del loro massimo comun divisore, il che è assurdo. Suppongasi D_1 maggiore di D; dovendo D_1 dividere esattamente A, ne verrà che A e B hanno un fattor comune più grande di D, cioè più grande del loro massimo comun divisore, il che pure è assurdo. Dunque D e D_1 non possono essere l'uno maggiore dell'altro, e quindi debbono essere eguali.

Ma quando si tratta di trovare il massimo comun divisore di due polinomj, oltre il principio ora dimostrato, spesso, come ben presto vedremo, occorre applicarne un altro che può vantaggiosamente usarsi anche nella ricerca del massimo comun divisore dei numeri, ed è; *che il massimo comun divisore di due quantità rimane inalterato sia sopprimendo, sia introducendo in una di esse un fattore che non è contenuto nell'altra.* Questo secondo principio si rende evidente con la semplice riflessione, che il massimo comun divisore di due quantità è essenzialmente composto dal prodotto dei soli fattori che ad esse sono comuni, ed è perciò affatto indipendente da qualunque fattore, che si trovi nell'una e manchi nell'altra.

Venendo agli esempj, supponiamo che sia $A=6x^3-6ax^2+2a^2x-2a^3$ e $B=12x^2-15ax+3a^2$. Qui in conformità della regola stabilita nell'Aritmetica, converrebbe cominciare dal dividere A per B; perchè o la divisione di A per B riesce esatta, e in tal caso è B il massimo comun divisore dei polinomj dati, o la divisione di A per B dà un resto R, e in tal caso la nostra ricerca si riduce a quella del massimo comun divisore di B e di R in forza del primo principio. Ma prima di procedere alla divisione di A per B, sarà utile l'osservare; 1.° che nel nostro esempio il 2 è fattore esatto di A e non di B, e il 3 è fattore esatto di B e non di A, e che perciò applicando il secondo principio, i due polinomj A e B si riducono a $3x^3-3ax^2+a^2x-a^3$, che rappresenteremo con A_1, e $4x^2-5ax+a^2$, che rappresenteremo con B_1: 2.° che per evitare i termini frazionarj che risulterebbero in quoziente dal dividere A_1 per B_1, converrebbe (180) moltiplicare A_1 per 4^2 ossia per 16, e che noi possiamo effettuare questa moltiplicazione senza timore di alterare il massimo comun divisore di A_1 e B_1: giacchè B_1 e 16 sono primi tra loro. Così avremo a dividere $48x^3-48ax^2+16a^2x+16a^3$ per $4x^2-5ax+a^2$. Effettuata questa divisione, si trova il resto $R=19a^2x-19a^3$. Ora secondo il primo principio, basterà cercare il massimo comun divisore di B_1 e di R, e quindi converrà dividere B_1 per R. Ma qui pure prima di effettuare la divisione, osserveremo che il resto $19a^2x-19a^3$ contiene i fattori 19 e a^2, i quali non son contenuti in B_1: perciò applicando nuovamente il secondo principio, sopprimeremo questi fattori, e divideremo soltanto per $x-a$. Eseguita questa divisione, si trova che nulla avanza, e da ciò si conclude che $x-a$ è il massimo comun divisore dei polinomj dati. Essi di fatto si dividono per $x-a$, e danno i quozienti esatti $6x^2+2a^2$, $12x-3a$.

*186. Oss. I.ª Può talvolta succedere che i termini del polinomio A abbiano un fattor comune, che rappresenteremo con M, che quelli di B abbiano

un fattor comune che indicheremo con N, e che tra M ed N esista un fattor comune rappresentato da D. Anche in tal caso potremo sopprimere i fattori M, N; ma siccome evidentemente D fa parte del massimo comun divisore di A e di B, s'intende bene che dovrà moltiplicarsi per D il massimo comun divisore di ciò che resta dei due polinomj dati dopo la soppressione di M e di N. Debbasi ridurre alla più semplice espressione il rotto $\frac{4a^2b-36b^3}{6a^3+16a^2b-6ab^2}$. Osserveremo che in questo rotto il numeratore equivale a $4b(a^2-9b^2)$, il denominatore a $2a(3a^2+8ab-3b^2)$, e che tra $4b$ e $2a$ esiste il fattor comune 2. Perciò cercheremo il massimo comun divisore di a^2-9b^2 e di $3a^2+8ab-3b^2$, riserbandoci a moltiplicarlo per 2 dopochè lo avremo trovato. I due polinomj a^2-9b^2, $3a^2+8ab-3b^2$ essendo del medesimo grado relativamente alla lettera a per la quale sono ordinati, gioverà prendere il primo per divisore e il secondo per dividendo. Fatta la divisione si troverebbe di resto $8ab+24b^2$, e per questo resto dovrebbe dividersi, secondo la regola, a^2-9b^2; ma è da osservarsi che $8ab+24b^2$ si riduce a $8b(a+3b)$, e che $8b$ non ha verun fattor comune con a^2-9b^2; divideremo adunque a^2-9b^2 soltanto per $a+3b$, e siccome la divisione riesce esatta, concluderemo che il prodotto di $a+3b$ per 2 esprime il massimo comun divisore cercato, e che il dato rotto riducesi all'espressione più semplice dividendone il numeratore e il denominatore per $2a+6b$, il che dà $\frac{4a^2b-36b^3}{6a^3+16a^2b-6ab^2}=\frac{2ab-6b^2}{3a^2-ab}$.

*187. Oss. II.ª Quando i coefficienti della lettera per la quale si ordinano i due polinomj A e B son numeri un poco grandi, o quando son quantità algebriche espresse da più termini (153), non sempre riesce scorgere a colpo d'occhio se esista tra i termini di A un fattor comune M, tra quelli di B un fattor comune N, e se M ed N siano primi tra loro per guisa da poterli trascurare affatto, o se abbiano invece un fattor comune D, del quale debbasi tener conto in conformità della precedente osservazione. Dandosi questo caso, fa di mestieri applicare separatamente la regola del massimo comun divisore tanto ai termini del polinomio A presi due a due, quanto a quelli del polinomio B, come pure ai fattori M ed N che si trovassero esistenti in A e in B. Per tal maniera verrà anche a conoscersi con più sicurezza se una quantità, per la quale debbasi moltiplicare uno dei polinomj a fine di evitare in quoziente i termini frazionarj, sia prima con l'altro polinomio.

Potenze e radici delle quantità algebriche.

*188. L'inalzamento a potenza e l'estrazione della radice sono in Algebra la stessa cosa che in Aritmetica (108, e seg.), egualmente che le quattro operazioni delle quali ci siamo occupati fin qui. Così inalzare $5a^3b^2c$ alla quarta potenza, il che si accenna scrivendo $(5a^3b^2c)^4$, vale prendere quattro volte per fattore il monomio $5a^3b^2c$, ossia trovare il prodotto di quattro monomj tutti

eguali a $5a^2b^2c$: ed estrarre la radice quadrata da $m^2+2mn+n^2$, il che si accenna scrivendo $\sqrt{(m^2+2mn+n^2)}$, vale risalire alla quantità dalla quale deriva il quadrato $m^2+2mn+n^2$, ossia trovare una quantità che moltiplicata per sè stessa dia di prodotto $m^2+2mn+n^2$. Per procedere col solito ordine alla ricerca delle regole algebriche relative a queste due operazioni, incominceremo dall'investigar quelle che spettano alle quantità monomie.

*189. Il prodotto di più fattori tutti positivi essendo sempre positivo, e quello di più fattori tutti negativi essendo positivo o negativo secondochè il numero degli stessi fattori è pari o impari, perchè dal moltiplicarne successivamente due, tre, quattro, cinque ec. risultano prodotti alternativamente positivi e negativi; possiamo stabilire che *le potenze di grado pari son sempre positive, e quelle di grado impari sono positive o negative secondochè è positiva o negativa la quantità dalla quale derivano.* Ciò premesso sia a^mb^n il monomio da inalzarsi ad una potenza del grado p. Avremo, secondo la definizione dell'inalzamento a potenza, $(a^mb^n)^p=a^mb^n\times a^mb^n\times a^mb^n\ldots$, ossia moltiplicando, $a^{m+m+m+\text{ ec.}}\ b^{n+n+n+\text{ ec.}}$, o meglio $a^{mp}b^{np}$, perchè gli esponenti m ed n debbono esser sommati tante volte quanti sono i fattori nei quali si trovano a^m e b^n, e questi fattori sono precisamente p. Dunque *s'inalza a potenza un monomio, moltiplicandone per il grado della potenza ciascuno degli esponenti.*

Se il monomio da inalzarsi a potenza avesse un coefficiente numerico, è chiaro che anche questo coefficiente dovrebbe comparire come fattore nel risultato, un numero di volte eguale al grado della potenza. Potremo perciò sottintendere al coefficiente stesso l'esponente 1, e quindi trattarlo come gli altri elementi del monomio. Così troveremo $(-2a^2b^3x)^3=-2^3a^6b^9x^3=-8a^6b^6x^3$, avvertendo che $2^3=8$.

*190. La precedente dimostrazione non suppone menomamente, che gli esponenti del monomio siano interi e positivi, e perciò la regola che ne abbiamo dedotta si estende anche al caso che siano negativi o frazionari. Dunque siccome $\frac{a}{b}$ è lo stesso (174. 3.°) che ab^{-1}, sarà $\left(\frac{a}{b}\right)^m=(ab^{-1})^m=a^mb^{-m}=\frac{a^m}{b^m}$; il che prova che *la potenza* m^sima^ *di un quoziente eguaglia il quoziente delle* m^sime^ *potenze del dividendo e del divisore.* A questo teorema è correlativo quello che si deduce dall'eguaglianza $(ab)^m=a^mb^m$, e che si enuncia: *la potenza* m^sima^ *di un prodotto eguaglia il prodotto delle potenze* m^sime^ *dei suoi fattori.*

*191. Applicando la regola dell'inalzamento a potenza alla ricerca della potenza m^{sima} del monomio $a^{\frac{n}{m}}$, risulterà $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m=a^{\frac{mn}{m}}=a^n$, e per conseguenza $a^{\frac{n}{m}}$ sarà la radice m^{sima} di a^n. Dunque $a^{\frac{n}{m}}$ e $\sqrt[m]{a^n}$ hanno lo stesso valore, e perciò: 1.° *ogni quantità con l'esponente frazionario, indica l'estrazione della radice di un grado corrispondente al denominatore della frazione, da una quantità che ha per esponente il numeratore della stessa frazione:* 2.° *si estrae la radice* m^sima^ *da un monomio, dividendone gli esponenti per* m. È

del resto evidente, che siccome per inalzare a potenza un monomio, si moltiplicano per il grado della potenza i suoi esponenti, così debbon dividersi per il grado della radice gli esponenti del monomio, per distruggere l'effetto dell'inalzamento a potenza, ossia per ritornare alla radice.

*192. Tutte le potenze di grado pari, come abbiamo superiormente (189) dimostrato, sono positive, e le potenze di grado impari sono positive o negative, secondochè son positive o negative le quantità dalle quali derivano. Segue da ciò: 1.° *che le radici di grado pari delle quantità positive, possono essere tanto positive quanto negative, e che perciò debbonsi munire del doppio segno* $\pm$: 2.° *che le radici di grado impari hanno il medesimo segno delle quantità dalle quali si estraggono:* 3.° *che le radici pari delle quantità negative non possono essere nè positive nè negative, e che in conseguenza non possono in verun modo sussistere.* I matematici appellano *immaginarie* le radici di quest'ultima specie, e *reali* le altre.

*193. Avviene spessissimo, che gli esponenti di un dato monomio non sono divisibili esattamente per il grado della radice che vuole estrarsene. Ciò sta ad indicare che quel monomio o non è una potenza, o è una potenza di un grado diverso da quello della radice che si presume di estrarne. Le radici per le quali si verifica questo caso, dicousi *incommensurabili* o *irrazionali*. Tali sarebbero $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[5]{a^4}$. Sebbene di queste radici sia impossibile ottenerne esattamente il valore, avvi peraltro una differenza enorme tra le radici irrazionali e le radici immaginarie. Posto infatti che nell'estrarre la radice m^{sima} di a^n, e perciò (191) nel dividere n per m, oltre il quoziente intero q, si trovi un resto r, per modo che sia $\frac{n}{m}=q+\frac{r}{m}$, avremo $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}=a^{q+\frac{r}{m}}$. Avvertendo ora che $q+\frac{r}{m}$ è maggiore di q e minore di $q+1$, perchè $\frac{r}{m}$ è un rotto proprio, si fa manifesto che $a^{q+\frac{r}{m}}$ ossia $\sqrt[m]{a^n}$ è compresa tra le quantità reali e razionali a^q ed a^{q+1}; il che vuol dire che la realtà o sussistenza di $\sqrt[m]{a^n}$ è tutt'altro che inconcepibile e ripugnante come quella delle radici immaginarie. Vedremo più in basso come possa aversi il valore approssimato delle radici irrazionali, e intanto stabiliremo i seguenti principj, che sono utilissimi per semplicizzare e calcolare le *quantità radicali*, ossia quelle quantità che contengono delle radici irrazionali.

194. Poichè $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$ (191) $=a^{\frac{n}{mn}}=\sqrt[mn]{a^n}$, perciò *un radicale del grado* m *si riduce al grado* mn, *purchè si alzi alla potenza* n *la quantità sotto il segno*, e viceversa. Così $\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[6]{a^4b^2}=\sqrt[9]{a^6b^3}$, come all'opposto $\sqrt[4]{a^6b^2}=\sqrt{a^3b}$.

195. Quindi *due radicali dei gradi* m, n *potran ridursi al comun grado* mn, *clevando respettiramente alle potenze* n, m *le quantità sotto l' uno e l' altro segno radicale*. Così $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[5]{b^4}$ si ridurranno a $\sqrt[15]{a^{10}}$, $\sqrt[15]{b^{12}}$.

196. Poichè $\sqrt[m]{ab}=a^{\frac{1}{m}}b^{\frac{1}{m}}$ (191) $=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$, perciò *il radicale di un prodotto eguaglia il prodotto dei radicali dei due fattori*, e reciprocamente. Così $\sqrt[4]{a^2b^2}=\sqrt[4]{a^2}\sqrt[4]{b^2}=$(191) $\sqrt[4]{a^2}\times\sqrt{b}$, come all' opposto $\sqrt[3]{2a^2}\sqrt[3]{3b}=\sqrt[3]{6a^2b}$.

197. Quindi poichè $b=\sqrt[m]{b^m}$, sarà $b\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b^m}\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{ab^m}$, e perciò *un coefficiente razionale può sempre introdursi sotto il segno radicale, purchè s' inalzi alla potenza corrispondente al grado del radicale.* Così $b\sqrt{a}=\sqrt{ab^2}$; $3a\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{27a^4}$. All' incontro se tra i fattori della quantità sotto il segno, ve ne sia alcuno con esponente eguale al grado del radicale o multiplo di esso, potremo estrarne la radice corrispondente, e porla per coefficiente al radicale. Così $\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}$; $\sqrt{a^3}=\sqrt{aa^2}=a\sqrt{a}$; $\sqrt{8a^3b^5}=\sqrt{4a^2b^4\times 2ab}=2ab^2\sqrt{2ab}$.

198. Inoltre $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$ (191) $=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, cioè *il quoziente di due radicali eguaglia il radicale del quoziente delle due quantità sotto il segno radicale, e viceversa.* Così $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=\pm 2$; $\frac{\sqrt{21a}}{\sqrt{7b}}=\sqrt{\frac{21a}{7b}}=\sqrt{\frac{3a}{b}}$.

199. Parimente $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n=a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$, cioè *un radicale di qualunque grado si alza alla potenza* n^{sima}, *elevando ad* n *la quantità sotto il segno.* Così $(\sqrt{a})^3=\sqrt{a^3}=a\sqrt{a}$; $(\sqrt[3]{2ab^2})^2=\sqrt[3]{4a^2b^4}=b\sqrt[3]{4a^2b}$ (193), e $(\sqrt[m]{a})^m=\sqrt[m]{a^m}=a^{\frac{m}{m}}=a$; dunque per *alzare alla potenza* m^{sima} *un radicale pur del grado* m^{simo}, *basta sopprimere affatto il segno radicale.*

200. Infine $\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a}\right)}=\sqrt[m]{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$, cioè *si estrae la radice* m^{sima} *da un radicale dell'* n^{simo} *grado, cambiando nel prodotto* mn *l' indice* m *del radicale.*

201. Osservazione. A tutte le precedenti conclusioni, immediatamente dedotte dalla natura stessa dei radicali, si sarebbe egualmente pervenuti, riducendo i radicali a potenze frazionarie, e applicando ai nuovi esponenti le regole date in più luoghi, riguardo agli esponenti interi. Queste regole son dunque comuni all' uno e all' altro genere di esponenti, e potremo sempre ricorrervi, qualora o non si abbiano ben presenti i principj qui esposti, o s'incontri qualche difficoltà nell'applicarli. Così troveremo $\sqrt[3]{ab}\times\sqrt[4]{ab^3}$ $=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}=$(163) $a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}=a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{13}{12}}=a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{12}}b=b\sqrt[12]{a^7b}$.

202. Si debba ora alzare alla potenza *m^{sima}* il binomio $a\pm b$; e sia primieramente $m=2$. Avremo $(a\pm b)^2=(a\pm b)(a\pm b)=a^2\pm 2ab+b^2$; onde *la potenza seconda, o il quadrato di un binomio* a±b, *si compone di tre ter-*

mini, cioè del quadrato a^2 *del primo termine a della radice, del doppio prodotto* $\pm 2ab$, *del primo a nel secondo* $+b$, *e del quadrato* b^2 *del secondo.* I segni son tutti positivi, se i due termini del binomio han segno eguale; se lo han diverso, il medio è negativo.

203. All' opposto se, dato il quadrato, vogliasene la radice, converrà avanti ordinarlo, e quindi, estratte le radici dal primo e ultimo termine, la loro somma, se il medio è positivo, o la lor differenza, se è negativo, darà la radice cercata; che dovrà però sempre munirsi del doppio segno (186). Così $\sqrt{(4a^4b^2-12a^2bc+9c^2)}=\pm(2a^2b-3c)=\pm 2a^2b\mp 3c$. Che se l' espressione data non è veramente un quadrato, sia perchè manchi di qualche termine, sia perchè il medio non corrisponda al doppio prodotto delle radici dei due estremi, la radice sarà allora irrazionale (193), e non potremo averla che approssimata coi metodi che a suo luogo daremo.

204. Un quadrato incompleto x^2+mx si compie coll' aggiungergli il quadrato della metà del secondo termine, divisa per la radice del primo. Qui la metà del secondo termine è $\frac{mx}{2}$, la radice del primo è x; sarà dunque $\frac{mx}{2x}=\frac{m}{2}$ la quantità che deve essere alzata a quadrato ed aggiunta; onde il quadrato compito sarà $x^2+mx+\frac{m^2}{4}$. E ciò è facile a intendersi, perchè dividendo per 2 il secondo termine del quadrato, ciò che risulta deve essere evidentemente il semplice prodotto dei due termini della radice, ossia del binomio; e dividendo questo prodotto per la radice del primo termine del quadrato, vale a dire per il primo termine del binomio, deve risultare in quoziente il secondo termine dello stesso binomio.

205. Se in luogo del binomio $a\pm b$, si abbia un trinomio $a+b+c$, o un quadrinomio $a+b+c+d$, ec. operando come sopra (202) si troverà, $(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$; $(a+b+c+d)^2=(a+b+c+d)(a+b+c+d)=a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$, ec. D' onde in generale s' inferirà che, *il quadrato di un polinomio qualunque, si compone del quadrato del primo termine e doppio prodotto di esso in tutti i seguenti; del quadrato del secondo e suo doppio prodotto in tutti i seguenti; del quadrato del terzo e suo doppio prodotto in tutti i seguenti; e così successivamente.* Mentre all' opposto *la radice del quadrato di un polinomio*, ordinato che sia, *risulterà dalla radice del primo termine, e dai quozienti che si avranno col dividere il secondo, terzo, quarto termine per il doppio della radice del primo, fino esclusivamente a quel termine, che nel polinomio dato corrisponderà al quadrato del primo quoziente.*

206. Sia ora $m=3$ (202), cioè si tratti di alzare a cubo il binomio $a\pm b$. Si avrà $(a\pm b)^3=(a\pm b)^2(a\pm b)=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$. Onde la *terza potenza o cubo di un binomio, contiene i cubi dei suoi due termini, e i tripli prodotti del quadrato di ciascun termine nell' altro.* Così $(2a^2c-3b)^3=8a^6c^3-36a^4bc^2+54a^2b^2c-27b^3$. All' opposto la radice terza di un cubo

perfetto ed ordinato, si avrà prendendo quella del primo e dell' ultimo termine. Per il cubo imperfetto avran luogo metodi analoghi a quelli dati per il quadrato (204).

207. Sia $m=4$, o voglia alzarsi $a\pm b$ alla quarta potenza. Troveremo $(a\pm b)^4=a^4\pm 4a^3b+6a^2b^2\pm 4ab^3+b^4$; come pure se $m=5$ avremo $(a\pm b)^5$ $=a^5\pm 5a^4b+10a^3b^2\pm 10a^2b^3+5ab^4\pm b^5$. Or se prendiamo a considerare l' andamento di queste potenze, e delle altre che possono nel modo stesso formarsi, si troverà costantemente: 1.° che i termini sono uno di più del numero esponenziale; 2.° che i segni son positivi se il secondo termine della radice è positivo, nel caso opposto sono negativi tutti i termini di posto pari; 3.° che gli esponenti delle due lettere vi procedono in ordine opposto; quello di a è massimo nel primo termine, ove eguaglia l' esponente stesso della potenza, e va poi successivamente decrescendo di un' unità in ciascuno dei termini seguenti, finchè diviene zero (147) nell' ultimo: quello di b comincia dall' essere zero nel primo termine, e va crescendo di un' unità in ciascun dei seguenti, finchè nell' ultimo eguaglia esso pure il grado della potenza; 4.° che il coefficiente del primo e dell' ultimo termine è l' unità; ciascuno poi degli altri si ottiene col moltiplicare quello del termine che precede coll' esponente ivi dato ad a, e col dividere il prodotto per il numero dei termini già costruiti. Ma come dal mezzo in poi tornano eguali in ordine inverso, così non si renderà necessario calcolargli che per la prir metà.

208. Tutto ciò serve chiaramente a concludere, che qualunque siasi m, avremo in generale $(a\pm b)^m=a^m\pm ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$ $\times a^{m-3}b^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}a^{m-4}b^4\pm$ ec..... $\pm b^m$, avvertendo rapporto all' ultimo termine, che il segno di sotto ha soltanto luogo quando essendo negativo il secondo termine del binomio, sia impari il grado m della potenza, nel qual caso esso ultimo termine, secondo ciò che abbiamo detto (207. 1.°), è di posto pari. Questa celebre formula è conosciuta col nome di formula del *Binomio di Newton*, dal nome immortale del suo discopritore. L' uso grande e continuo che se ne fa in tutti i rami delle Matematiche, porterà sempre a riguardarla come uno dei più importanti e preziosi ritrovamenti del genio.

Per farne un' applicazione al caso nostro sia $m=5$. Sarà $(a\pm b)^5$ $=a^5\pm 5a^4b+\frac{5.4}{2}a^3b^2\pm\frac{5.4.3}{2.3}a^2b^3+\frac{5.4.3.2}{2.3.4}ab^4\pm\frac{5.4.3.2.1}{2.3.4.5}b^5$. Qui la formula si arresta, perchè tutti i termini seguenti contengono per fattore $m-5$ che è zero, e perciò tutti si annullano. Frattanto riducendo, si avrà $(a\pm b)^5$ $=a^5\pm 5a^4b+10a^3b^2\pm 10a^2b^3+5ab^4\pm b^5$, precisamente come sopra (207).

*209. Ma per istabilire sopra un più valido appoggio di quello che è l' induzione, la legge con la quale procedono le potenze del binomio, sup-

poniamo che la legge medesima siasi verificata sino alla potenza del grado $m-1$ del binomio $a\pm b$, e che sia risultato $(a\pm b)^{m-1}=a^{m-1}\pm(m-1)a^{m-2}b$ $+\frac{(m-1)(m-2)}{2}a^{m-3}b^2\pm\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}a^{m-4}b^3+$ec. Moltiplicando i membri di questa eguaglianza per $a\pm b$, avremo $(a\pm b)^{m-1}(a\pm b)$ ossia $(a\pm b)^m=$

$$\left(a^{m-1}\pm(m-1)a^{m-2}b+\frac{(m-1)(m-2)}{2}a^{m-3}b^2\pm\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}a^{m-4}b^3+\text{ec.}\right)(a\pm b)$$

$$=\left\{\begin{array}{l} a^m\pm(m-1)a^{m-1}b+\frac{(m-1)(m-2)}{2}a^{m-2}b^2\pm\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}a^{m-3}b^3+\text{ec.} \\ \pm \quad a^{m-1}b+ \quad (m-1)a^{m-2}b^2\pm \quad \frac{(m-1)(m-2)}{2}a^{m-3}b^3+\text{ec.}\end{array}\right\}$$

Osserveremo ora, che in questo risultato i coefficienti di $a^{m-1}b$ si riducono visibilmente ad m; che quelli di $a^{m-2}b^2$ avendo il moltiplicator comune $m-1$, si riducono ad $\left(\frac{m-2}{2}+1\right)(m-1)=\left(\frac{m-2+2}{2}\right)(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}$; che, mettendo fuor di parentesi il prodotto $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ fattor comune dei coefficienti di $a^{m-3}b^3$, ne risulta $\left(\frac{m-3}{3}+1\right)\times\frac{(m-1)(m-2)}{2}=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$; ec. Eseguite adunque tutte queste riduzioni, risulta $(a\pm b)^m=a^m\pm ma^{m-1}b$ $+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}b^3+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}a^{m-4}b^4\pm$ ec. Dunque ogni potenza successiva del binomio $a+b$ segue precisamente la medesima legge della potenza che la precede; vale a dire la legge che si riscontra nella seconda potenza del binomio, deve necessariamente esistere nella seconda, terza, quarta, ec. dello stesso binomio.

*210. Altrove dimostreremo che la formula del binomio ha luogo anche nel caso che il grado della potenza sia negativo o frazionario, o negativo e frazionario a un tempo medesimo. Intanto potremo osservare che, essendo $(a+b)^m=(b+a)^m$, e perciò $a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2+$ ec. $+b^m$ $=b^m+mab^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}a^2b^{m-2}+$ ec. $+a^m$, ne segue 1.° *che i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono eguali.* Inoltre fatto $a=b$ nella formula generale (208), il segno superiore dà, schisando tutti i termini per a^m, $2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}+$ ec. $+1$, il segno inferiore dà $0=1-m+\frac{m(m-1)}{2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}+$ ec. ±1, e perciò 2.° *la somma dei coefficienti della potenza* m^sima^ *del binomio eguaglia la potenza* m^sima^ *di* 2; 3.° la *somma dei coefficienti dei termini di posto impari eguaglia quella dei coefficienti dei termini di posto pari.*

211. La formula generale delle potenze del binomio può trasformarsi in un modo molto più comodo per le applicazioni. Poichè in generale $a^{m-n}=$(163. 2.°) $\frac{a^m}{a^n}$, sarà dunque $(a\pm b)^m=a^m\pm\frac{ma^mb}{a}+m\frac{(m-1)a^mb^2}{2a^2}$ .....

$\pm m\frac{(m-1)(m-2)a^m b^3}{2.3a^3}+$ ec. ossia, fatto per comodo $\frac{\pm b}{a}=Q$, $(a\pm b)^m=a^m+ma^mQ+m\frac{(m-1)a^m}{2}Q^2+m\frac{(m-1)(m-2)}{2.3}a^mQ^3+$ ec. ove potrà osservarsi, che il secondo termine è il prodotto del primo in mQ, il terzo è il prodotto del secondo in $\frac{m-1}{2}Q$, il quarto è il prodotto del terzo in $\frac{m-2}{3}Q$ ec. Dunque se si rappresentino con A, B, C ec. i termini primo, secondo, terzo ec., si avrà sostituendo, $(a\pm b)^m=a^m+mAQ+\frac{(m-1)}{2}BQ+\frac{(m-2)}{3}CQ+$ ec. con legge assai manifesta. Così volendo alzare alla quarta potenza $\frac{c}{2\sqrt{b}}-\frac{2a\sqrt{b}}{c}$, porremo $Q=-\frac{2a\sqrt{b}}{c}:\frac{c}{2\sqrt{b}}=-\frac{4ab}{c^2}$, $m=4$, $a^m=\left(\frac{c}{2\sqrt{b}}\right)^4=\frac{c^4}{16b^2}$, e quindi $\left(\frac{c}{2\sqrt{b}}-\frac{2a\sqrt{b}}{c}\right)^4=\frac{c^4}{16b^2}-\frac{ac^2}{b}+6a^2-\frac{16a^3b}{c^2}+\frac{16a^4b^2}{c^4}$.

*212. Se ora si debba elevare alla potenza m^{sima} il trinomio $c+b+a$, ripresa la formula $(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2+$ ec. $+b^m$, vi sostituiremo c in luogo di a, e $b+a$ in luogo di b, e ne risulterà

$$(c+b+a)^m=c^m+mc^{m-1}(a+b)+\frac{m(m-1)}{2}c^{m-2}(a+b)^2+\text{ ec. }+(a+b)^m.$$

Posti poi in questa espressione i valori di $(a+b)$, $(a+b)^2$, ec. $(a+b)^m$ dedotti dalla formula del binomio, avremo il valore della richiesta potenza.

Similmente per ottenere l' m^{sima} potenza del quadrinomio $d+c+b+a$, basterà porre nella medesima formula d invece di a, e $c+b+a$ invece di b; il che darà

$$(d+c+b+a)^m=d^m+md^{m-1}(a+b+c)+\frac{m(m-1)}{2}d^{m-2}(a+b+c)^2+\text{ ec.}$$

E qui pure non resterà altro da farsi, fuorchè la sostituzione dei valori di $(a+b+c)$, $(a+b+c)^2$, ec. $(a+b+c)^m$ calcolati per mezzo della precedente espressione.

Proseguendo in questa maniera, è chiaro che potremo inalzare a qualunque potenza un polinomio qualunque.

Nozioni preliminari sull' equazioni.

213. Ogni formula che esprime l'egnaglianza di due quantità, può chiamarsi *equazione*. Così $6+3=9$, $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$ sono equazioni. Più particolarmente però si dà questo nome a quelle, nelle quali l'eguaglianza delle due parti non è per sè medesima manifesta. Tale sarebbe $\frac{3x}{4}+2=\frac{5}{8}+9x$. Le due quantità eguagliate diconsi *membri* dell' equazione; il sinistro è il primo, il destro è il secondo.

214. In un'equazione puramente aritmetica, il secondo membro non è ordinariamente che il risultamento delle operazioni indicate dal primo; dato questo, l' altro ne viene per conseguenza, nè potrebbe variarsi, nè porsene un diverso in sua vece. Non così se l' equazione sia algebrica, cioè se l' un membro, o l' altro, o ambedue insieme contengono qualche lettera algebrica. Fra due espressioni di questa natura, qualunque sieno e comunque formate, può sempre sussistere un' equazione. Così per esempio, mentre non potrebbe farsi, siccome è evidente, $\frac{6}{7}+5=\frac{3}{8}$, niente impedirà che si ponga $\frac{6x}{7}+5=\frac{3x}{8}$. E ciò, perchè la lettera x essendo di sua natura atta a rappresentare qualunque numero, può dunque rappresentar quello pure che soddisfa all' equazione, cioè che rende il primo membro eguale al secondo. Se non che mentre x isolata e fuori dell' equazione, è capace di qualunque significato, introdotta in quella perde per dir così la sua generalità, ed assume il valore del numero ignoto di cui tien luogo, e che, siccome vedremo, in qualche caso può esser moltiplice. La difficoltà consiste nel trovar questo valore, il che forma l' oggetto primario della bella ed interessante parte d'analisi conosciuta col nome di *Teoria dell' equazioni*. Ma prima di passare a stabilirne i principj, sarà bene di premettere alcune osservazioni.

216. Una stessa incognita x non può, generalmente parlando, assoggettarsi a soddisfare a due differenti eqnazioni. Infatti dovendo per soddisfare alla prima assumere il valore particolare e proprio di quell' equazione (214), perde dunque ogni attitudine a prendere il valore che necessario sarebbe per soddisfare alla seconda. Diverse quindi essendo l' incognite nelle due equazioni, se in una si rappresenta con x, nell' altra si dovrà rappresentare o con y o con z, o in qualunque altro modo proprio a distinguere l' una dall' altra, e mostrare che l' una non deve confondersi con l' altra.

217. Se due incognite x, y si trovassero in una stessa equazione, come se per esempio si avesse $3xy+5x=8y+6$, una sola bastando per rendere il primo membro eguale al secondo, l' altra rimarrà dunque indeterminata, e conserverà il suo valore generico. Potremo dunque darle qualunque valor ci piaccia; e come ad ogni nuovo valore che le daremo, l' equazione cangerà, così altrettante volte cangerà dunque di valore la prima incognita, in modo che per ogni valore arbitrario dato ad y, ne corrisponderà sempre uno differente per x. Così se nell' equazione proposta si fa $y=1$, nascerà l' altra $3x+5x=14$, ossia $8x=14$, che è soddisfatta da $x=\frac{7}{4}$; mentre se si pone $y=2$, si ha $6x+5x=22$, ossia $11x=22$, che è soddisfatta da $x=2$.

218. Per altro se l' incognita y debba simultaneamente soddisfare ad un' altra equazione, come se per esempio, oltre l' equazione precedente si

avesse l' altra $3y+6=18$, in virtù di questa la nuova incognita perderà la sua generalità, nè potrà avere altri valori che quelli opportuni per la nuova equazione, che soli potranno esser sostituiti nella prima. Questa prenderà dunque una forma fissa e determinata, ed i valori di x si ristringeranno a quei pochi atti a soddisfarla. Nel nostro caso, per la nuova equazione, si ha $y=4$; la prima divien dunque $12x+5x=38$, a cui soddisfa unicamente $x=\frac{38}{17}$.

219. Lo stesso accaderà se le due incognite si trovino contemporaneamente in due differenti equazioni. È chiaro che, dando ad y un valore qualunque arbitrario, risulterebbero due equazioni differenti con la sola incognita x, da cui dovrebbero esser soddisfatte ambedue, il che si è veduto generalmente impossibile (216). Non può dunque y avere valori qualunque; ma quei soli bensì che introdotti nell'equazioni portano ad aver dall'una e dall'altra gli stessi valori di x. Altrettanto si dica nel caso che si avesse un più gran numero d'incognite e d'equazioni. Tutte le incognite debbono esser determinate in maniera che, postone il valore in qualunque delle equazioni, queste risultino tutte in egual modo soddisfatte. Come ciò possa ottenersi, in breve lo mostreremo; e intanto si osserverà che, come l'eguaglianza di numero fra l'equazioni e l'incognite, cangia in determinato il valor generico di quest'ultime, così ogni qual volta le incognite aver dovranno un valor determinato, sarà necessario che il loro numero coincida con quello delle equazioni.

220. I coefficienti che accompagnano l' incognita in un'equazione, come pure i termini senza di essa, non son sempre numerici. Spessissimo gli troveremo rappresentati con lettere, le quali per quanto è possibile si trascelgono fra le prime dei due alfabeti latino e greco; l'ultime essendo esclusivamente consacrate dall'uso a rappresentare le incognite. La differenza dunque che passa fra l'une e l'altre è, che quelle debbono riguardarsi come quantità note e già date o trovate, queste come quantità da trovarsi: il che meglio s'intenderà nel progresso.

221. L'equazioni sono infine di diverso grado, che sempre è determinato o dal maggiore esponente dell'incognita, quando questa sia unica, o anche dalla maggior dimensione (152) considerata relativamente alle incognite se queste sono più d'una. Così, l'equazione $x^3+x^2=x-1$, è del terzo grado; $xy=5x+6$, ed $x^2+2x=1$ son del secondo; $x+y=5$ è del primo. Ma qualunque ne sia il grado, lo scopo è di far conoscere il valor dell'incognite. Un poco d'abito al calcolo basta per l'equazioni del primo e secondo grado: quelle del terzo e del quarto hanno delle difficoltà; per quelle del quinto, del sesto ec. non vi è metodo generale.

Equazioni del primo grado.

222. Riunire in un membro dell'equazione tutti i termini noti, e lasciar nell'altro l'incognita *sola, positiva, senza coefficiente o divisore, e senza esponente*, è ciò che si chiama *risolvere un'equazione*. Ora l'operazioni che guidano all'intento per un'equazione del primo grado, principalmente dipendono dai tre seguenti assiomi, cioè che *due quantità restano eguali* 1.º *se all'una e all'altra si aggiungono, o tolgano quantità eguali*; 2.º *se l'una e l'altra si dividano o si moltiplichino per quantità eguali*; 3.º *se l'una e l'altra si cangino di segno*.

Col mezzo del primo l'incognita può ridursi in un sol membro ed isolarsi; poichè se per esempio si abbia $6x-9=8x+5$, potremo toglier dall'uno e dall'altro membro $8x$, ed avremo (149) $6x-9-8x=8x+5-8x$, cioè riducendo $-2x-9=5$; potremo aggiunger 9 all'uno e all'altro membro, ed avremo $-2x-9+9=5+9$, cioè $-2x=14$. Col mezzo del secondo potremo spogliar l'incognita del suo coefficiente, poichè dividendo per 2 si avrà $-\frac{2x}{2}=\frac{14}{2}$, ossia $-x=7$. Col mezzo del terzo potremo infine renderla positiva, poichè cangiando segno si ha $x=-7$, con che l'equazione è risoluta; infatti se si sostituisce -7 in luogo di x nel primo membro, si ha $-42-9=-51$, e se si sostituisce nel secondo si ha $-56+5=-51$. Dunque -7 è il numero prima ignoto e adesso noto, che soddisfa all'equazione, e di cui l'incognita x teneva il luogo (214).

223. Come però il richiamo diretto di questi assiomi, o almeno dei due primi, riescirebbe in pratica di grave imbarazzo, si usa perciò di appoggiar piuttosto i ragionamenti ai seguenti principj, che ne sono immediata conseguenza.

I. *In ogni equazione si può trasportare qualunque termine da un membro all'altro, purchè si cangi di segno.* Trasportandolo infatti si toglie da un membro, e segnandolo nell'altro con segno opposto, si toglie anche da questo (159): dunque in virtù del primo assioma i due membri restano eguali. Così dall'equazione $3x-a=2x+c$, può farsi nascer l'altra $3x-2x=a+c$, cioè $x=a+c$.

II. *Se l'uno e l'altro membro sieno o moltiplicati, o divisi per una medesimo quantità, questa potrà elidersi affatto dall'equazione.* Infatti così facendo vengonsi a dividere nel primo caso, e moltiplicar nel secondo i due membri per la quantità che si elide o si sopprime: dunque in forza del secondo assioma, questi restano eguali. Così l'equazione $\frac{3x}{2}=\frac{9a}{2}$ può ridursi ad $x=3a$. Di qui intanto risulta un modo facile per togliere i rotti da un'equazione: per il che basterà ridurla tutta quanta al medesimo denominatore, e questo quindi sopprimere, o anche neppur segnarlo, comecchè divisor comune de' due membri. Così l'equazione $\frac{x}{2}+\frac{3}{5}=\frac{3x}{10}-\frac{7a}{6}$, ridotta al denominatore 30, si cangerà nell'altra $15x+18=9x-35a$.

III. *Il coefficiente o moltiplicatore totale, ed il divisor totale di un membro, possono trasportarsi l'uno come divisore, l'altro come moltiplicatore nell'altro membro.* Infatti queste due operazioni equivalgono l'una a dividere, l'altra a moltiplicare i due membri per la medesima quantità: dunque in forza del secondo assioma nè l'una, nè l'altra altera la loro eguaglianza. Così l'equazione $3x=7b+c$, si cangia nell'altra $x=\frac{7b+c}{3}$; e l'equazione $\frac{x}{3}=5$ si cangia in $x=15$.

224. Ciò premesso ecco l'ordine di operazioni che dovremo tenere, per risolvere un'equazione qualunque di primo grado con un'incognita sola. Prima di tutto si comincerà dallo spogliarla dei fattori o divisori comuni ai due membri, quando ne abbia. In seguito si scioglieranno, moltiplicando (153), le parentesi entro le quali inclusa si trovasse l'incognita, come sarebbe nell'equazione $3a+bx=b+a(x-5)$, lasciando intatte le rimanenti, fino che il colpo d'occhio non ne faccia conoscere necessario lo scioglimento per dar luogo a qualche riduzione. Quindi si toglieranno i rotti riducendo tutta l'equazione al medesimo denominatore, il quale non si segnerà. Si trasporteranno nel primo membro tutti i termini con l'incognita, e nell'altro tutti i termini senza, cangiando gli uni e gli altri di segno. Si faranno in seguito tutte le possibili riduzioni a cui il trasporto può aver dato luogo, sia dei termini simili (151), sia dei fattori comuni a ciascun termine, che si segneranno con l'incognita fuori di parentesi (153), includendo al di dentro ogni restante; onde il primo membro risulti in forma di un termine solo. Si cangeranno i segni a tutta l'equazione, se questo termine risulta negativo; e in fine si trasporterà come divisore nel secondo membro il coefficiente totale dell'incognita, con che rimasta questa in tal modo sola, senza coefficiente e positiva, l'equazione sarà dunque completamente risoluta.

225. Esempj. Abbiasi l'equazione $\frac{39x}{5}+6=15x-\frac{3}{2}$. Divideremo per 3 ed avremo $\frac{13x}{5}+2=5x-\frac{1}{2}$; ridurremo al comun denominatore 10, e verrà $26x+20=50x-5$; trasporteremo, e si avrà $26x-50x=-5-20$, cioè riducendo $-24x=-25$, e cangiando i segni $24x=25$; d'onde infine, dividendo per il coefficiente 24, $x=\frac{25}{24}$. Infatti sostituito questo valore nella proposta, il primo membro si cangerà in $\frac{65}{8}+6=\frac{113}{8}$, ed il secondo in $\frac{125}{8}-\frac{3}{2}=\frac{125-12}{8}=\frac{113}{8}$, come il primo.

II. Sia $\frac{3ax}{b}+x+\frac{5a}{2b}=\frac{1}{2}ax+b$. Tolti i rotti con ridurre al medesimo denominatore $2b$, avremo $6ax+2bx+5a=abx+2b^2$. Trasportando verrà $6ax+2bx-abx=2b^2-5a$; e ponendo fuori l'incognita, $x(6a+2b-ab)=2b^2-5a$; d'onde $x=\frac{2b^2-5a}{6a+2b-ab}=(153)\frac{2b^2-5a}{6a+b(2-a)}$.

III. Sia $3a(b-x)+ax=2b(a-x)$. Sciolte le parentesi verrà $3ab-3ax+ax=2ab-2bx$, ossia $3ab-2ax=2ab-2bx$; di qui $2bx-2ax=-3ab+2ab$; quindi $2x(b-a)=-ab$, ed $x=\frac{-ab}{2(b-a)}=\frac{ab}{2(a-b)}$.

*226. Talvolta il valore dell'incognita si presenta sotto certe forme particolari, che meritano di essere attentamente esaminate per ben comprenderne il significato. A tale effetto premetteremo, che qualunque equazione di primo grado e con una sola incognita può sempre ridursi alla forma $ax+m=bx+n$, ove a, b, m, n rappresentano numeri interi e positivi. Infatti dopo aver tolte le parentesi e le frazioni (224), che posson trovarsi in una data equazione, e dopo aver riunito, tanto nel primo come nel secondo membro, in un termine solo tutti quelli che contengon l'incognita, e in un altro tutti quelli che non la contengono, è chiaro che l'equazione non potrà aver che quattro termini interi, cioè due nel primo membro e due nel secondo. È inoltre evidente che qualora o tutti o alcuni di questi termini risultassero negativi, si renderebbero positivi aggiungendo ad ambedue i membri dei termini maggiori di quelli, che si voglion cangiare di segno. Così l'equazione $\frac{2}{3}(x-3)=4-x+\frac{1}{3}$ prima si riduce a $2x-6=12-3x+1$, ossia a $2x-6=13-3x$, e poi aggiungendo $4x+7$ da una parte e dall'altra, diventa $6x+1=x+20$, che è della forma indicata.

Essendo dunque $ax+m=bx+n$ la formula generale delle equazioni di primo grado a un'incognita, e da essa deducendosi $x=\frac{n-m}{a-b}$, ne segue che il valor dell'incognita è sempre dato dal quoziente o più in generale dal rapporto di due differenze quali sono $n-m$ ed $a-b$. Or finchè si suppone che in una data equazione i numeri rappresentati da n e da a siano respettivamente diversi da quelli rappresentati da m e da b, sussisteranno ambedue i termini del rapporto $\frac{n-m}{a-b}$ che dà il valore di x, e quindi è indubitato che si troverà per l'incognita un numero intero o frazionario, positivo o negativo atto a soddisfar l'equazione. Ma se suppongasi invece che sia $n=m$, ovvero $a=b$, o insieme $n=m$ ed $a=b$, il rapporto $\frac{n-m}{a-b}$, che non sussiste se non in quanto sussiste ognun dei suoi termini, verrà a mancare insieme con questi, nè quindi potrà più somministrarci alcun numero che sostituito ad x nell'equazione, la sodisfaccia. La forma che in questi casi assume il valore di x non manca di avere un certo significato. Esaminiamola separatamente in ognuna delle tre ipotesi.

Quando è $m=n$ e perciò $n-m=0$, l'equazione generale diventa $ax+m=bx+m$, e il valor dell'incognita $x=\frac{0}{a-b}$. Or questa espressione indica

manifestamente che il valore di x atto a sodisfar l'equazione nel presente caso deve esser tale, che il suo prodotto per $a-b$ sia zero, e in conseguenza che quel valore non può essere altro che zero, poichè soltanto zero moltiplicato per $a-b$ può dare zero di risultato. Ciò d'altronde vien confermato osservandu che l'equazione $ax+m=bx+m$, posto $x=0$, diventa $m=m$, e così vien soddisfatta, mentre non lo sarebbe certamente se invece di x si sostituisse qualunque altro valore.

Quando è $a=b$ ossia $a-b=0$, l'equazione divenla $ax+m=ax+n$, e il valor generale dell'incognita x diventerebbe $\frac{n-m}{0}$. Ma deve osservarsi che un tal valore non è ammissibile nell'ipotesi attuale perchè esso deriva da una serie di operazioni che si posson tutte eseguire sicuramente sull'equazione $ax+m=bx+n$ finchè a e b si suppongon diversi, ma non già quando a e b sono eguali. Infatti dopo aver dedotto da $ax+m=bx+n$ l'equazione $(a-b)x=n-m$, è chiaro che il coefficiente $a-b$ essendo zero non può passarsi divisore del secondo membro, come quando è qualche cosa, perchè ciò equivarrebbe a divider per zero, e divider per zero è una manifesta contradizione. Dunque il risultato finale dal quale deve argomentarsi il valor di x nel caso che esaminiamo, è $0x=n-m$ e non già $x=\frac{n-m}{0}$. Ora dall'espressione $0x=n-m$ risulta chiaramente che il valor dell'incognita atto a sodisfar l'equazione $ax+m=ax+n$, dovrebbe esser tale che il suo prodotto per zero fosse $n-m$, e che in conseguenza l'equazione è assurda, giacchè ripugna che il produtto di due fattori uno dei quali è zero, sia $n-m$. E ciò vien cunfermato dall'osservare che togliendo ax da un membro e dall'altro, risulta $n=m$ mentre m ed n si suppongono differenti.

Quando infine sono $a=b$ ed $m=n$ il valore generale di x diverrebbe $\frac{0}{0}$. Ma qui pure deve osservarsi, come nel precedente caso, che il risultato finale dal quale fa d'uopo dedurre il valore dell'incognita quando a ed m son respettivamente eguali a b ed n, è $(a-b)x=n-m$ ossia $0x=0$ e non $x=\frac{0}{0}$. E siccome da $0x=0$ risulta evidentemente che il valor dell'incognita deve esser tale, che il suo prodotto per zero dia zero, ne inferiremo che l'equazione è sodisfatta, nel caso attuale, da qualunque valore che si ponga in luogo di x; il che vien confermato dalla semplice ispezione dell'equazione $ax+m=ax+m$.

Segue dall'analisi precedente che in realtà da veruna equazione può risultare $\frac{n-m}{0}$ oppure $\frac{0}{0}$, e che queste espressioni, le quali s'incontrano quando si presume trarre il valore di x da una formula generale in quei casi appunto che non sono da essa compresi, e pei quali non potrebbe nemmeno sussistere, son per sè stesse vuote di senso, nè può ad esse attribuirsi il si-

gnificato proprio delle espressioni $0x=n-m$, $0x=0$, se non per modo di convenzione.

227. Fin qui l'incognita è stata una sola: se son due, avremo altresì due equazioni (219), ove le incognite dovranno essere sparse in termini differenti, e non riunite in un termine solo, altrimenti le due equazioni non sarebbero di primo grado (221). Due metodi si conoscono per risolverle, preferibili l'uno all'altro, secondo le diverse opportunità.

1.° Metodo. Prima di ogni altra operazione, si cominci dal togliere i rotti dalle due equazioni, se ve ne sono. Quindi si sciolga una di esse relativamente alla sola incognita x, cioè riguardando l'altra y come nota, o come se fosse una di quelle quantità che abbiamo detto doversi rappresentare con le prime lettere dell'alfabeto (220). Si sostituisca quindi il valore così ottenuto di x nell'altra equazione; questa rimarrà allora con la sola incognita y, e potrà risolversi coi metodi precedenti.

Esempio I. Abbiasi 1.ª $2x+3y=17$; 2.ª $5x+2y=26$. Dalla 1.ª si avrà $x=\frac{17-3y}{2}$, valore che posto nella 2.ª darà $\frac{85-15y}{2}+2y=26$. Di qui, tolti i rotti, si ha $85-15y+4y=52$, ossia $85-11y=52$; d'onde $-11y=-33$, ossia $11y=33$, ed $y=3$. Posto questo valore nella 1.ª, si avrà $2x+9=17$, e quindi facilmente $x=4$: come pur si avrebbe ponendolo nella 2.ª

Es. II. Abbiansi l'equazioni 1.ª e 2.ª di fianco. Tolti i rotti, avremo la 3.ª e 4.ª Dalla 4.ª, come più semplice della 3.ª, prendendo il valore d'y, avremo la 5.ª; e sostituendo questo valore nella 3.ª, e quindi togliendo il rotto, avremo la 6.ª; che, trasportati nel primo membro i termini ove è x, darà la 7.ª; la quale ridotta si cangerà nell'8.ª; d'onde in fine il valore di x, che posto nella 5.ª darà quello di y.

1.ª $ax+\frac{y}{a}=a+x+y$

2.ª $\frac{x}{a}+y=ax$

3.ª $a^2x+y=a^2+ax+ay$

4.ª $x+ay=a^2x$

5.ª $y=\frac{a^2x-x}{a}=\frac{x}{a}(a^2-1)$

6.ª $a^3x+x(a^2-1)=a^3+a^2x+ax(a^2-1)$

7.ª $a^3x+x(a^2-1)-a^2x-ax(a^2-1)=a^3$

8.ª $x(a-1)=a^3$

$x=\frac{a^3}{a-1}$; $y=\frac{a^2}{a-1}(a^2-1)=a^2(a+1)$

2.° Metodo. Dopo aver tolti i rotti, si riuniscano nel primo membro sì dell'una che dell'altra equazione tutti i termini con le incognite, e i rimanenti nel secondo. Se si facciano tutte le possibili riduzioni, potranno condursi i primi membri a non aver più che due termini, uno con l'incognita x, l'altro con l'incognita y. Si moltiplichi allora la prima equazione per il coefficiente di x nella seconda, e la seconda per il coefficiente di x nella prima; e qualora i termini con x abbiano lo stesso segno, si sottraggano una dall'altra le due nuove equazioni; se lo hanno diverso si sommino. Nell'uno e nell'altro caso x rimarrà *eliminata*, cioè sparirà dal risultamento, ed avremo un'equazione con y sola, che sciolta darà y; d'onde x come sopra.

Così nel primo esempio precedente, ove le due equazioni hanno già la forma prescritta, moltiplicando per 5 la 1.ª, per 2 la 2.ª, si avranno la 3.ª e 4.ª, che sottratte danno la 5.ª, d'onde il valore di y, che posto nella 1.ª dà infine la 6.ª, dalla quale si ha x.

$$\begin{array}{ll} 3.^a & 10x+15y=85 \\ 4.^a & 10x+\ \ 4y=52 \\ \hline 5.^a & \qquad 11y=33 \\ & \qquad\ \ y=\frac{33}{11}=3 \\ 6.^a & 2x+9=17 \\ & 2x=8;\ x=4. \end{array}$$

*228. Ambedue i metodi precedentemente esposti sono applicabili al caso di un qualsivoglia numero di equazioni e di incognite. Abbiasi infatti un numero n di equazioni coesistenti, o come suol dirsi, *un sistema* di n equazioni e di n incognite. Adottando il primo metodo, potremo in una di queste equazioni isolare una delle incognite, riguardando come note tutte le altre, e sostituirne il valore nelle equazioni che restano. Avremo allora evidentemente un nuovo sistema di $n-1$ equazioni e di altrettante incognite. Isolata come precedentemente una nuova incognita in una delle equazioni di questo sistema, e sostituitone il valore nell'altre, otterremo in simil guisa un terzo sistema che avrà un'equazione o un'incognita di meno del secondo. Proseguendo ad operare in cosiffatta maniera, è chiaro che il numero dell'equazioni e delle incognite scemerà continuamente di unità in unità, dimodochè perverremo infine ad una sola equazione con un' incognita sola, e che questa equazione finale sarà preceduta da un seguito di sistemi nei quali il numero delle incognite e delle equazioni, cominciando a contare dall'ultimo, sarà 2, 3, 4, ec. Risoluta adunque l'ultima equazione, avremo il valore numerico di una delle incognite. Questo valore sostituito in una delle due equazioni dell'ultimo sistema, ci somministrerà il valore di un'altra incognita. In simil modo da una delle equazioni del penultimo sistema potremo ottenere il valore di una terza incognita mediante quello delle altre due. Così, seguitando a risalire da un sistema all'altro, tutte le incognite rimarranno a una per volta determinate.

Per adottare il secondo metodo, prima di tutto fa d'uopo ridurre le n equazioni alla forma $ax+by+cz+$ ec. $=m$ ove $a, b, c, \ldots\ m$ rappresentano quantità note. Ciò si ottiene togliendo le parentesi e le frazioni, trasportando nel primo membro di ciascuna equazione i termini contenenti le incognite, nel secondo quelli che non le contengono, e infine riducendo i termini simili. Ridotte così le date equazioni, moltiplicando ognuna di esse per i coefficienti che ha una delle incognite in tutte le altre, si ottengono n equazioni nelle quali l'incognita da eliminarsi ha lo stesso coefficiente. Sottraendo poi o sommando due a due tutte queste equazioni, secondochè i termini nei quali è l'incognita da eliminarsi sono di segno eguale o contrario, ne risulta un sistema di $n-1$ equazioni e di altrettante incognite. Così questo metodo dà i medesimi risultati del precedente, e quindi serve egualmente che quello alla soluzione delle equazioni a più incognite.

*229. Applichiamo ad un esempio il metodo della eliminazione. Abbiansi

le prime tre equazioni qui di fianco. Si moltiplichi ciascuna di esse per il prodotto dei coefficienti di x nell' altre due, cioè la 1.ª per 16, la 2.ª per 24, la 3.ª per 6. Avremo così la 4.ª, 5.ª e 6.ª Si sottragga la 5.ª e 6.ª dalla 4.ª, e verranno la 7.ª e 8.ª con le sole incognite y, z; equazioni che moltiplicate l'una per 62, l'altra per 104 daranno la 9.ª e 10.ª, e queste sottratte daranno finalmente l'11.ª con la sola incognita z, e dalla quale si avrà $z=1$. Questo valore posto nella 7.ª o nell'8.ª farà trovare $y=-2$, ed ambedue posti in una qualunque delle prime tre daranno in fine $x=5$.

$$
\begin{array}{lrrrr}
1.^a & 3x- & 2y+ & 4z= & 23 \\
2.^a & 2x+ & 3y+ & 5z= & 9 \\
3.^a & 8x+ & 5y- & 10z= & 20 \\
\hline
4.^a & 48x- & 32y+ & 64z= & 368 \\
5.^a & 48x+ & 72y+ & 120z= & 216 \\
6.^a & 48x+ & 30y- & 60z= & 120 \\
\hline
7.^a & - & 104y- & 56z= & 152 \\
8.^a & - & 62y+ & 124z= & 248 \\
\hline
9.^a & & -6448y- & 3472z= & 9424 \\
10.^a & & -6448y+ & 12896z= & 25792 \\
\hline
11.^a & & & 16368z= & 16368 \\
 & & & z= & 1
\end{array}
$$

L'esercizio insegnerà da sè stesso non poche facili pratiche per render più agevole e spedita l'operazione. Così se in luogo di eliminare in principio x si fosse eliminato y, moltiplicando la prima per 15, la seconda per 10, la terza per 6, avremmo avute equazioni con coefficienti numerici molto minori; ed anche più piccoli si sarebbero ottenuti se la prima si fosse moltiplicata per 5, la seconda per quattro, la terza per 2, con che si sarebbe ridotta z al medesimo coefficiente 20, cioè al minimo multiplo di quei tre coefficienti; multiplo che, quando non si presenti da sè medesimo, può sempre trovarsi con la regola già data per ridurre compendiosamente più rotti al medesimo denominatore (56). Con ciò la 4.ª la 5.ª e la 6.ª sarebbero venute come qui di contro; la 5.ª sottratta dalla 4.ª avrebbe dato la 7.ª, e la 6.ª sommata con la 4.ª avrebbe dato l'8.ª con la sola x; d'onde si sarebbe avuta immediatamente $x=\frac{155}{31}=5$; e quindi dalla 7.ª $y=-2$; e da una delle prime tre $z=1$ come sopra.

$$
\begin{array}{ll}
4.^a & 15x-10y+20z=115 \\
5.^a & 8x+12y+20z=36 \\
6.^a & 16x+10y-20z=40 \\
\hline
7.^a & 7x-22y \qquad =79 \\
8.^a & 31x \qquad\qquad =155
\end{array}
$$

*230. Prendiamo ora a risolvere due equazioni qualunque a due incognite, le quali potremo rappresentare con le formule 1.ª e 2.ª poste di contro; giacchè come abbiamo detto di sopra (228), ogni equazione a più incognite si riduce sempre alla forma $ax+by+cz+$ ec. $=m$. Moltiplichiamo, per eliminare y, la 1.ª per b_1 e la 2.ª per b; avremo la 3.ª e 4.ª che, sottratta l'una dall'altra, daranno la 5.ª e da questa si dedurrà

$$
\begin{array}{ll}
1.^a & ax+by=m \\
2.^a & a_1x+b_1y=m_1 \\
\hline
3.^a & ab_1x+bb_1y=mb_1 \\
4.^a & ba_1x+bb_1y=bm_1 \\
\hline
5.^a & (ab_1-ba_1)x=mb_1-bm_1 \\
6.^a & x=\frac{mb_1-bm_1}{ab_1-ba_1} \\
7.^a & y=\frac{am_1-ma_1}{ab_1-ba_1}
\end{array}
$$

la 6.ª esprimente il valore dell'incognita x. Sostituito nella 1.ª o nella 2.ª questo valore ed eseguite le riduzioni, ne risulterà la 7.ª che esprime il valore dell'incognita y.

Esaminando questi risultati si fa manifesto 1.° che i valori delle due incognite son dati da due frazioni aventi lo stesso denominatore; 2.° che tal denominatore è formato dalla differenza dei prodotti che risultano, moltiplicando il coefficiente di x della 1.ª per il coefficiente di y della 2.ª, e il coefficiente di x della 2.ª per quello di y della 1.ª; 3.° che tanto il numeratore del valore di x come il numeratore del valore di y, si deducono dal denominator comune, cambiando nelle quantità note m, m_1 i coefficienti di x nel primo caso e quelli di y nel secondo; 4.° infine che i valori di x e di y in numeri interi o frazionarj positivi o negativi son possibili solamente finchè i prodotti mb_1, am_1, ab_1 sono respettivamente diversi dai prodotti bm_1, ma_1, ba_1, ossia finchè non son nulle le differenze mb_1-bm_1, am_1-ma_1, ab_1-ba_1.

*231. Per meglio conoscere ciò che succede allorchè non si verifica in un sistema di due equazioni a due incognite la sopra espressa condizione (230. 4.°), supponiamo in primo luogo che o l'una o l'altra soltanto delle due differenze mb_1-bm_1, am_1-ma_1, sia zero. In tal caso una delle incognite sarà eguale a zero e il valore dell'altra seguiterà ad essere un numero determinato. Ciò risulta con evidenza dalle formule generali 6.ª e 7.ª, nè abbisogna di altri schiarimenti. Supponiamo in secondo luogo che sia nulla la sola differenza ab_1-ba_1. Le stesse formule daranno $x=\frac{mb_1-bm_1}{0}$, $y=\frac{am_1-ma_1}{0}$; e queste espressioni indicheranno che le due equazioni non possono coesistere. E infatti da $ab_1-ba_1=0$ si trae $b_1=\frac{ba_1}{a}$, che sostituito nell'equazione $a_1x+b_1y=m_1$, dà $a_1x+\frac{ba_1y}{a}=m_1$, ossia $aa_1x+ba_1y=am_1$, o meglio $ax+by=\frac{am_1}{a_1}$ equazione che è in contradizione con l'altra $ax+by=m$, giacchè da esse risulterebbe $\frac{am_1}{a_1}=m$, cioè $am_1=a_1m$, il che è contro l'ipotesi. Supponiamo in terzo luogo che siano eguali a zero due qualunque delle tre differenze mb_1-bm_1, am_1-ma_1, ab_1-ba_1. In questo caso anche la terza differenza dovrà essere nulla, perchè una qualunque delle tre equazioni $mb_1-bm_1=0$, $am_1-ma_1=0$, $ab_1-ba_1=0$ è una conseguenza necessaria dell'altre due, come può facilmente verificarsi eliminando da due qualunque di esse una delle quantità a, b, m. Dunque nell'ipotesi attuale i valori generali delle due incognite si ridurranno a $\frac{0}{0}$, e rimarrà ad indagarsi il significato che qui può attribuirsi (226) a questa espressione. A tale effetto osserveremo che le equazioni $mb_1-bm_1=0$, $am_1-ma_1=0$, danno $b_1=\frac{bm_1}{m}$, $a_1=\frac{am_1}{m}$, e che questi valori sostituiti nell'equazione $a_1x+b_1y=m_1$, la rendono affatto identica all'altra $ax+by=m$. Dunque i risultati $x=\frac{0}{0}$,

$y = \frac{0}{0}$ indicano che delle due equazioni dalle quali derivano, l'una non è che una trasformazione dell'altra, ossia che invece di due equazioni non se ne ha che una sola, e che in conseguenza le incognite x ed y possono avere qualunque valore.

*232. Non sarà inutile trovare i valori generali di x, y, z in un sistema qualunque di tre equazioni di primo grado a tre incognite. Per procedere in questa ricerca nel modo il più semplice e speditivo, stabilite le tre equazioni di fianco, dalla 2.ª moltiplicata per a si sottri la 1.ª moltiplicata per $a_{,}$; ne resulterà la 4.ª, dalla quale potrà dedursi la 5.ª col semplice cambiamento dell'indice $(_{,})$ in $(_{,,})$, il che equivarrà a sottrarre la 1.ª moltiplicata per $a_{,,}$ dalla 3.ª moltiplicata per a. Componendo poi, in conformità di ciò che abbiamo altrove (230) stabilito, le due frazioni che

1.ª $a\,x + b\,y + c\,z = m$

2.ª $a_{,}x + b_{,}y + c_{,}z = m_{,}$

3.ª $a_{,,}x + b_{,,}y + c_{,,}z = m_{,,}$

4.ª $(ab_{,} - ba_{,})y + (ac_{,} - ca_{,})z = am_{,} - ma_{,}$

5.ª $(ab_{,,} - ba_{,,})y + (ac_{,,} - ca_{,,})z = am_{,,} - ma_{,,}$

6.ª $z = \frac{(ab_{,} - ba_{,})(am_{,,} - ma_{,,}) - (ab_{,,} - ba_{,,})(am_{,} - ma_{,})}{(ab_{,} - ba_{,})(ac_{,,} - ca_{,,}) - (ab_{,,} - ba_{,,})(ac_{,} - ca_{,})}$

7.ª $y = \frac{(am_{,} - ma_{,})(ac_{,,} - ca_{,,}) - (am_{,,} - ma_{,,})(ac_{,} - ca_{,})}{(ab_{,} - ba_{,})(ac_{,,} - ca_{,,}) - (ab_{,,} - ba_{,,})(ac_{,} - ca_{,})}$

8.ª $z = \frac{ab_{,}m_{,,} - ba_{,}m_{,,} + bm_{,}a_{,,} - am_{,}b_{,,} + ma_{,}b_{,,} - mb_{,}a_{,,}}{ab_{,}c_{,,} - ba_{,}c_{,,} + bc_{,}a_{,,} - ac_{,}b_{,,} + ca_{,}b_{,,} - cb_{,}a_{,,}}$

9.ª $y = \frac{am_{,}c_{,,} - ma_{,}c_{,,} + mc_{,}a_{,,} - ac_{,}m_{,,} + ca_{,}m_{,,} - cm_{,}a_{,,}}{ab_{,}c_{,,} - ba_{,}c_{,,} + bc_{,}a_{,,} - ac_{,}b_{,,} + ca_{,}b_{,,} - cb_{,}a_{,,}}$

10.ª $x = \frac{mb_{,}c_{,,} - bm_{,}c_{,,} + bc_{,}m_{,,} - mc_{,}b_{,,} + cm_{,}b_{,,} - cb_{,}m_{,,}}{ab_{,}c_{,,} - ba_{,}c_{,,} + bc_{,}a_{,,} - ac_{,}b_{,,} + ca_{,}b_{,,} - cb_{,}a_{,,}}$

danno i valori delle due incognite di due equazioni, dalla 4.ª e 5.ª si avranno la 6.ª e 7.ª, ossia, sviluppando i prodotti, l'8.ª e 9.ª Sostituiti infine in una delle prime tre i valori così trovati di z e di y ne risulterà la 10.ª che esprime quello di x.

Or per poca attenzione che pongasi alle formule 8.ª, 9.ª e 10.ª, apparisce chiaramente: 1.° che i valori delle tre incognite di tre equazioni qualunque di primo grado son dati da altrettante espressioni frazionarie aventi lo stesso denominatore; 2.° che i numeratori di queste espressioni si ottengono dal comun denominatore cangiando in m, $m_{,}$, $m_{,,}$ i respettivi coefficienti delle incognite; cioè a, $a_{,}$, $a_{,,}$ allorchè vuol formarsi il valore di x; b, $b_{,}$ $b_{,,}$ quando si vuole il valore di y; c, $c_{,}$, $c_{,,}$ quando si cerca quello di z; 3.° che il comun denominatore si compone dei sei prodotti di tre fattori che risultano combinando in tutti i modi possibili il coefficiente di x di ciascun'equazione con quello di y di una dell'altre due e con quello di z della rimanente; 4.° infine che i termini del denominatore, e quindi anche quelli dei numeratori che da esso derivano, sono alternativamente positivi e negativi, e perciò, in casi analoghi a quelli altrove (231) osservati, potranno aversi per il valore delle incognite espressioni della forma $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$ le quali indicheranno

che sono o contradittorie, o identiche alcune delle date equazioni (*ivi*). Tuttociò basta a stabilire la seguente regola pratica per formare il valore delle tre incognite indipendentemente dai metodi dell'eliminazione e della sostituzione:

Si dispongano tre a tre in tutti i modi possibili i coefficienti a, b, c, *il che si otterrà facilmente ponendo* a *in principio, in mezzo e in fine di* bc *e di* cb; *si diano gl' indici* uno *e* due *al secondo e al terzo fattore dei sei prodotti che ne risulteranno. La somma di questi prodotti presi coi segni alternativamente positivi e negativi darà il comun denominatore dei valori di* x, y, z, *e da esso si avranno i numeratori cambiando successivamente in* m, m_i, m_{ii} *i coefficienti* a, a_i, a_{ii}; b, b_i, b_{ii}; c, c_i, c_{ii}.

'233. Le precedenti osservazioni e la regola che ne abbiamo dedotta han luogo anche nel caso di quattro equazioni e di altrettante incognite. Risolvendo infatti quattro equazioni come $ax+by+cz+d\omega=m$, si troverebbe 1.° che i valori delle incognite x, y, z ed ω sono espressi da quattro frazioni: 2.° che i numeratori di queste frazioni differiscono dal comun denominatore per avere un m in luogo di un a la prima frazione, in luogo di un b la seconda, in luogo di un c la terza e in luogo di un d la quarta; 3.° che il denominator comune è la somma dei prodotti alternativamente positivi e negativi che si formano disponendo quattro a quattro in tutti i modi possibili i coefficienti a, b, c, d, e dando gli apici *uno*, *due* e *tre* ai fattori secondo, terzo e quarto di tali prodotti. Sicchè ciò che abbiam detto di tre equazioni a tre incognite si verifica anche per quattro, e quindi può per induzione, estendersi ad un numero qualunque di equazioni e di incognite.

234. Termineremo con osservare di passaggio, come in alcuni casi una sola equazione può servire a determinare due incognite, o per meglio dire può risolversi in due, atte a determinare l'una incognita e l'altra. Tale sarebbe l'equazione $(x-a)^2+(y-b)^2=0$; poichè ambedue i quadrati essendo positivi non è possibile che l'uno distrugga l'altro: se dunque la lor somma è zero, conviene che ciascuno dei due si annulli da sè medesimo, e che si abbia $(x-a)^2=0$, $(y-b)^2=0$, e quindi ancora $x-a=0$, $y-b=0$, il che dà $x=a$, $y=b$. Tale pure sarebbe l'altra $ax+y\sqrt{b}=g+p\sqrt{b}$, ossia, $ax-g+(y-p)\sqrt{b}=0$, se tutte le quantità note ed ignote fossero per condizione razionali; poichè in tal caso la prima parte $ax-g$ essendo razionale, non può esser distrutta dalla seconda $(y-p)\sqrt{b}$, che è irrazionale. Le due parti dunque si annulleranno da sè medesime, e si avrà $ax-g=0$, $(y-p)\sqrt{b}=0$, o più semplicemente $y-p=0$; e di qui $x=\frac{g}{a}$, $y=p$.

235. Quasi tutte le operazioni che si eseguiscono per risolvere un'equazione di primo grado, possono farsi anche nelle *ineguaglianze*, cioè in quelle espressioni algebriche tramezzo alle quali invece del segno $=$ trovasi l'uno o l'altro di questi due segni $>$, $<$ che respettivamente si leggono *maggiore*, *minore*. Infatti è chiaro 1.° che se i due membri d'un'ineguaglianza si aumentino o si diminuiscano di quantità eguali, restano ineguali; il che rende lecito il trasporto delle quantità da un membro nell'altro; 2.° che resteranno

pure ineguali se si moltiplichino o si dividano per quantità eguali; il che dà luogo a trasformare il coefficiente di un membro in divisore dell'altro, e viceversa: onde posto $\frac{a^2x}{p}+mn>ab+ax+mn$, sarà 1.° $\frac{a^2x}{p}-ax>ab$: 2.° $\frac{ax}{p}-x>b$: 3.° $ax-px>bp$: 4.° $x>\frac{bp}{a-p}$.

Più cose però vi sono in cui le ineguaglianze differiscono dall'equazioni. E prima di tutto in quelle non si può come in queste trasportare i due membri l'uno in luogo dell'altro. Così mentre è indifferente scrivere $x=a-b$, oppure $a-b=x$, lo stesso non sarebbe se invece di $a>b$, si scrivesse $b>a$, il che è bene evidente. Occorrendo quest' inversione, convien rovesciare il segno dell' ineguaglianza, e scrivere $b<a$. Quindi neppur potremo senza la stessa cautela 1.° cambiare i segni ai due membri, operazione equivalente al trasporto dell'un membro in luogo dell'altro; 2.° moltiplicargli o dividergli per quantità negative, operazioni che portano il cambiamento totale dei segni.

Inoltre date due equazioni, come $x=a-b$, $y=c+d$, possiamo sommarle e sottrarle, moltiplicarle fra loro, e divider l'una per l'altra; ma date due ineguaglianze anche omogenee, cioè col primo membro in ambedue maggiore o minor del secondo, come $m>a$, $n>b$ non sempre potremo sottrar l'una dall'altra, o divider l'una per l'altra, potendosi soltanto sommarle o moltiplicarle fra loro; perciò si potrà fare $m+n>a+b$, ovvero $mn>ab$, ma non già $m-n>a-b$, ovvero $\frac{m}{n}>\frac{a}{b}$. Anzi neppure è lecita la moltiplicazione qualora o tutte le quantità poste in confronto sian negative, o lo sieno le due minori. Così da $-3>-5$, $-6>-7$, come pure da $5>-10$, $2>-8$, malamente si concluderebbe moltiplicando, $18>35$, $10>80$; e poichè l'inalzamento d'un' ineguaglianza a potenze intere o frazionarie equivale alla moltiplicazione o divisione di più ineguaglianze tra loro, non può formarsi qualche potenza, o estrarsi qualche radice da un' ineguaglianza, senza le stesse cautele. Tutto questo è evidente.

All'opposto alcune operazioni che non sarebbero permesse nell'equazioni, divengon lecite nell' ineguaglianze. Così supposti a, b, p numeri interi e positivi ed $a>b+p$, può concludersi che a più forte ragione sarà $a>b$; rigettando il p dal secondo membro senza trasportarlo nel primo, il che non sarebbe permesso nell'equazioni; come pure da $a<b-p$ si avrà $a<b$, da $a-\frac{1}{p}>b$ si avrà $a>b$; e da $a>\sqrt{b}$ si avrà $a>p$, se p sieno gl' interi contenuti in $\sqrt{b}$. Infine da $a>b$ sarà permesso concludere $a>-b$, come pure $-a<b$, ed $a-b>0$, $b-a<0$. Supposto $a-b=d$, avremo dunque $d>0$, e $-d<0$; d'onde si ha che lo zero è il limite di separazione tra le quantità positive e negative.

Applicazioni delle Teorie precedenti alla soluzione dei Problemi di primo grado.

236. Intendiamo per *Problema* un quesito nel quale sia proposta la ricerca d'una o più quantità dotate di qualche particolarità determinata, o atte a soddisfare a certe stabilite condizioni, o aventi relazioni assegnate con altre quantità note. Quelle che si cercano si chiamano le *incognite* del Problema; le condizioni o relazioni volute si chiamano i *dati*. Perchè il Problema sia solubile, è necessario che i dati sieno tali ed in tal modo espressi, da poter concludere tra le quantità note ed ignote, e secondo il numero di quest'ultime, una o più equazioni, le quali sciolte rendan palese il valore delle quantità che si cercano.

237. Ma quando pur niente manchi nell'esposizione dei dati, il saper condurci da questi all'equazioni, nel che adunque tutto consiste il segreto della soluzione di un Problema, non è cosa che molto facilmente si apprenda; tanto più che non posson darsi regole e precetti generali su questo proposito. Il solo buon senso, e l'esame attento e minuto delle condizioni proposte possono unicamente servirci di scorta. I pochi esempj che qui riportiamo serviranno intanto a dare una qualche idea dello spirito del metodo, che presso a poco dovremo negli altri casi tenere. Si scorgerà che tutta l'arte in principal modo consiste nel suppor già trovati i numeri che si cercano, rappresentargli algebricamente con i soliti simboli dell'incognite, cioè con x, y, z ec. (220), e su di essi eseguir tutte le operazioni che naturalmente si farebbero, se già conoscendone il valore, si volesse mostrare come questo realmente corrisponde alle richieste condizioni.

I.° Trovare un numero la cui metà, quarta e quinta parte sommate insieme faccian 38. Sia x il numero cercato; $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{4}x$, $\frac{1}{5}x$ ne saranno la metà, la quarta e la quinta parte; la lor somma deve per condizione essere eguale a 38; avremo dunque l'equazione $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x=38$. Tolti i rotti, si ha $10x+5x+4x=38\times20$ cioè $19x=760$, d'onde $x=\frac{760}{19}=40$, numero cercato. Infatti 20 sua metà, 10 sua 4.ª parte, 8 sua 5.ª parte fanno 38.

II.° Qual è quel numero il cui terzo e quinto differiscon d'8? Sia x: il terzo sarà $\frac{1}{3}x$, il quinto $\frac{1}{5}x$. Dunque $\frac{1}{3}x-\frac{1}{5}x=8$, d'onde, tolti i rotti, $5x-3x=120$, ed $x=60$. Infatti 20 terza parte di 60, e 12 quinta parte differiscono appunto d'8.

III.° Diviso un numero per 6 si è avuto un tal quoziente, che sommato col divisore e col dividendo dà 69. Qual è questo numero? Sia x: il suo quoziente per 6 sarà $\frac{1}{6}x$, e quindi in forza della condizione $\frac{1}{6}x+x+6=69$,

ossia $x+6x+36=114$, d'onde facilmente $x=54$. Infatti 9, quoziente di 54 diviso per 6, sommato con 54 e con 6 dà 69.

IV.° Dividere il 32 in due parti tali che moltiplicando l'una per 3, l'altra per 2, la somma dei due prodotti sia 70. Chiamo x una delle due parti, sarà $32-x$ l'altra; $3x$ sarà il prodotto della prima per 3; $2(32-x)$ quello della seconda per 2; la somma dei quali dovendo far 70, avremo visibilmente l'equazione $3x+2(32-x)=70$; cioè, sciogliendo la parentesi e riducendo, $x+64=70$, d'onde $x=6$. Sarà dunque 6 una delle parti, e quindi $32-6=26$ l'altra. Infatti la prima moltiplicata per 3 fa 18, l'altra per 2 fa 52, prodotti che sommati danno 70. Si noti che lo stesso si sarebbe trovato se nello stabilir l'equazione si moltiplicava per 2 la parte x, per 3 la parte $32-x$.

V.° Trovare un tal numero x tanto minore di 12, quanto il suo prodotto per 5 è maggiore di 30. Il senso del quesito è che sottraendo da 12 il numero cercato x, deve aversi lo stesso resto che sottraendo 30 dal suo quintuplo $5x$. Dunque $12-x=5x-30$, ed $x=7$. Infatti il 7 è minore del 12 di 5 unità, e di altrettante è maggiore del 30 il 35 quintuplo di 7.

VI.° Dividere il 25 in due parti tali, che la maggiore contenga 49 volte la minore. Ciò vuol dire che l'una parte divisa per l'altra deve dare in quoziente 49. Sia dunque x la maggiore, sarà $25-x$ la minore, e quindi $\frac{x}{25-x}=49$, d'onde $x=49(25-x)$; e sciolta la parentesi, $x=1225-49x$; di qui $x=\frac{1225}{50}=24{,}5$ parte maggiore, e $25-x=0{,}5$ parte minore.

VII.° Un padre ha il sestuplo dell'età del figlio, e la somma delle loro età è 91. Qual è l'età di ciascuno? Sia x l'età del padre, sarà $\frac{1}{6}x$ quella del figlio; d'onde $x+\frac{1}{6}x=91$; $6x+x=546$; $x=78$, età del padre, ed $\frac{1}{6}x=13$, età del figlio.

VIII.° A e B postisi al giuoco con egual somma han perduto. La perdita di A è 12, quella di B è 57, e B ha solo il quarto di ciò che resta ad A. Quanto avevano in principio? Avevano x; e poichè A perdè 12, gli resta $x-12$; mentre a B che perdè 57 resta $x-57$. Ma B rimane col quarto di ciò che resta ad A, dunque $x-57=\frac{x-12}{4}$, d'onde $x=72$.

IX.° Si hanno due tazze con un solo coperchio; l'una pesa 12 once, ed è ignoto il peso dell'altra, e del coperchio. Sappiamo però che posto il coperchio sulla prima si ha un peso totale triplo della seconda; postolo sulla seconda si ha un peso doppio di quello della prima. Quanto pesa la seconda tazza, quanto il coperchio? Sia x il peso del coperchio; sarà $x+12$ ciò che con esso pesa la prima tazza; e perciò $\frac{1}{3}(x+12)=\frac{1}{3}x+4$ ciò che pesa l'altra senza di esso. Questa dunque insieme col coperchio peserà $x+\frac{1}{3}x+4$ ovvero $\frac{4}{3}x+4$, numero che per condizione deve esser doppio di 12, quantità

d'once che pesa l'altra. Avremo dunque $\frac{1}{3}x+4=24$; d' onde $x=15$ peso del coperchio, e $\frac{1}{3}x+4=9$ peso dell'altra tazza.

X.° Tre amici, che chiamo B, C, D giuocarono, e il giuoco di B e C fu 21 lira; quello di B e D fu 24; e quello di C e D 27. Quanto giuocò ciascuno? Posto x il denaro di B, sarà $21-x$ quello di C, e $24-x$ quello di D, che sommati debbon far 27 lire. Dunque $21-x+24-x=27$; $2x=45-27=18$, ed $x=9$, giuoco di B, il che dà 12 lire per C e 15 per D.

Osserv. Al primo aspetto le tre quantità del denaro parevano tante incognite differenti; ma osservando meglio, si vede che una determina l'altre. Perciò il numero delle incognite non dipende da quello delle questioni, ma dalla relazione che è tra le condizioni del Problema. Pur si avrebbe la soluzione introducendo più incognite: ma le soluzioni più semplici van preferite.

XI°. Un padre lascia al figlio maggiore 1000 scudi e $\frac{1}{6}$ di ciò che resta; al secondo 2000 scudi e $\frac{1}{6}$ del resto; al terzo 3000 scudi e $\frac{1}{6}$ del resto, e così fino all'ultimo. Fatte le parti, si trovarono eguali. Cerco l'asse paterno, il numero dei figli e la parte di ciascuno. Anche qui basta un'incognita; poichè conosciuto l'asse paterno, e divisolo per la parte del figlio maggiore, si avrà il numero delle parti eguali e perciò de' figli. Chiamo dunque x l' asse paterno, e pongo per comodo $1000=a$; poi dico: quando il maggiore ha preso a, l'asse resta $x-a$, di cui dee avere $\frac{1}{6}$; dunque la sua parte è $a+\frac{1}{6}(x-a)=\frac{1}{6}(5a+x)$. La tolgo da x, e resta $x-\frac{1}{6}(5a+x)=\frac{5}{6}(x-a)$, di cui il secondo dee avere $2a$, e rimarrà $\frac{5}{6}(x-a)-2a=\frac{1}{6}(5x-17a)$, il cui sesto è $\frac{1}{36}(5x-17a)$: onde la parte del secondo è $2a+\frac{1}{36}(5x-17a)=\frac{5}{36}(11a+x)$. Or le due parti sono eguali; dunque $\frac{1}{6}(5a+x)=\frac{5}{36}(11a+x)$. Tolgo i rotti ed ho $30a+6x=55a+5x$, $x=25a=25000$; onde la parte del maggiore è 5000 scudi; e 5 sono i fratelli.

XII.° La somma di due numeri è a, la lor differenza è b: quali sono questi numeri? Siano x, y; avremo $x+y=a$, $x-y=b$, equazioni che sommate danno $x=\frac{a+b}{2}$, sottratte $y=\frac{a-b}{2}$. Così se $a=10$, $b=6$, si troverà $x=8$, $y=2$.

XIII.° Indovinate le lire di A e di B: se A ne dà una a B, ne hanno un'egual somma; se B ne dà due ad A, questi ne ha il doppio di B. Sieno x quelle di A, y quelle di B: la 1.ª condizione dà $x-1=y+1$, la 2.ª $x+2=2(y-2)$. Sottratta la 1.ª equazione dalla 2.ª si ha $y=8$, col qual valore la 1.ª dà $x=10$.

XIV.° Un Orefice vende 3 once d'oro e 5 d'argento per 318 lire; e 5 once d'oro e 7 d'argento per 522 lire: quanto costa l'oncia d'oro, e l'oncia d'argento? Posti x, y i valori cercati, si avrà $3x+5y=318$; $5x+7y=522$, equazioni che sciolte secondo la regola (227), danno $y=6$; ed $x=96$.

XV.° Di tre cavalli, il primo colla metà del prezzo degli altri vale 25 rusponi: l'altro con un terzo del prezzo degli altri 26; l'ultimo colla metà del prezzo degli altri 29. Qual è il prezzo di ciascuno? Chiamando x, y, z i tre prezzi, l'equazioni saranno $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=25$, $y+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z=26$, $z+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=29$, le quali, fatti sparire i rotti, divengono 1.ª $2x+y+z=50$, 2.ª $3y+x+z=78$, 3.ª $2z+x+y=58$. Tolgo la 1.ª dalla 2.ª e viene 4.ª $2y-x=28$; moltiplico la 2.ª per 2 e ne tolgo la 3.ª, il che mi dà 5.ª $5y+x=98$; infine sommo la 4.ª e 5.ª e trovo $y=18$; onde dalla 4.ª $x=8$, e dalla 3.ª $z=16$.

*238. Nel tradurre in equazione un problema giova moltissimo rappresentarne algebricamente i dati numerici, poichè allora il valore delle incognite risulta espresso in termini generali, ed è quindi atto a risolvere tutti i problemi della medesima specie di quello dato. Per darne un esempio, risolviamo nuovamente il problema XI.° Indicando con a la somma che deve darsi al primo figlio, e con $\frac{1}{m}$ la porzione che pur gli spetta sull'asse paterno x diminuito di a, la parte totale del primogenito sarà espressa da $a+\frac{1}{m}(x-a)$ ossia da $\frac{am+x-a}{m}$, che può mettersi sotto la forma $\frac{x+a(m-1)}{m}$. Tolta questa prima parte da x, resterà $x-\frac{x+a(m-1)}{m}$ ovvero $\frac{mx-x-a(m-1)}{m}$. Il secondo figlio dovendo avere $2a$ più $\frac{1}{m}$ di ciò che resta, la sua parte si esprimerà con $2a+\frac{1}{m}\left(\frac{mx-x-a(m-1)}{m}-2a\right)$, che si riduce a $\frac{2am^2+mx-x-a(m-1)-2am}{m^2}$, o meglio ad $\frac{mx-x+2am(m-1)-a(m-1)}{m^2}$. Eguagliando ora le due parti, giacchè per condizione debbono essere eguali, ne risulterà l'equazione $\frac{x+a(m-1)}{m}=\frac{mx-x+2am(m-1)-a(m-1)}{m^2}$ che, moltiplicata per m^2 e tolti i termini comuni ai due membri, diventa $0=-x+am(m-1)-a(m-1)$; e di qui risulta $x=am(m-1)-a(m-1)=(am-a)(m-1)=a(m-1)(m-1)=a(m-1)^2$. Posto questo valore di x nell'espressione $\frac{x+a(m-1)}{m}$, verrà $\frac{a(m-1)^2+a(m-1)}{m}=\frac{a(m-1)(m-1+1)}{m}=a(m-1)$; sicchè la parte del primo figlio, e quindi quella di tutti gli altri, sarà $a(m-1)$: e siccome i figli debbono evidentemente esser tanti quante sono le parti eguali ad $a(m-1)$ che possono farsi con l'asse paterno

$a(m-1)^2$, ne seguirà che il numero dei figli verrà espresso da $\frac{a(m-1)^2}{a(m-1)}$, ossia da $m-1$. Dunque in generale il numero dei figli eguaglia il denominatore della frazione $\frac{1}{m}$ diminuito di un'unità, la parte di ciascheduno eguaglia il loro numero moltiplicato per la somma a, e l'asse patrimoniale è il prodotto di a per il quadrato del numero dei figli. Così prendendo i dati numerici del problema XI.°, avremo che i figli sono $6-1$, cioè 5; che la parte di ciascheduno è 5×1000, cioè 5000, e infine che l'asse paterno è 1000×5^2, cioè 25000.

*239. Perchè un problema non sia assurdo e perchè possa risolversi con le teorie svolte fin qui, non sempre è sufficiente che dia luogo ad un'equazione di primo grado o ad un sistema di tante equazioni di primo grado quante sono le incognite; e che l'equazione, quando il problema non ha che un'incognita, non abbia un membro contradittorio o identico all'altro (226), e quando ha più incognite, l'equazioni che ne derivano siano tra loro diverse senza essere opposte (230 e seg.). Queste condizioni valgono ad assicurare la possibilità di stabilire e di risolvere le equazioni nelle quali si traduce il problema; ma se il problema, come talvolta succede, è di tal indole da esigere che i valori delle incognite risultino interi e positivi, non avvi dubbio che esse sole sarebbero insufficienti. Ora esprimendo algebricamente i dati numerici del problema, oltre il vantaggio posto precedentemente in rilievo, si conseguisce appunto anche quello di conoscere quali altre condizioni debbono verificarsi affinchè il dato problema non sia nè assurdo nè impossibile a risolversi. Ne fornirà un esempio il problema seguente.

Per pagare la giornata a certi operaj e ai loro sorveglianti a ragione di 2 lire per ciascheduno ai primi e di 5 lire ai secondi, occorrono 60 lire; si richiederebbe precisamente il doppio, se a tutti dovesse pagarsi una giornata di 5 lire: quanti son dunque gli operaj e quanti i sorveglianti? Siano x gli uni, y gli altri, e rappresenti a la giornata di uno degli operaj, b quella di uno dei sorveglianti, ed m la somma che è necessaria per pagarli tutti. Con la massima facilità si dedurranno dall'enunciato del problema le due equazioni 1.ª e 2.ª scritte di contro, dalle quali con pari facilità potranno aversi le formule 3.ª e 4.ª che esprimono in termini generali i valori delle due incognite. Posto poi $a=2$, $b=5$, $m=60$ ed eseguite le riduzioni, troveremo i risultati particolari $x=20$ ed $y=4$ che, come può agevolmente verificarsi, sodisfano esattamente al dato problema. Ma se si faccia

1.ª $ax+by=m$

2.ª $bx+by=2m$

3.ª $x=\frac{m}{b-a}$

4.ª $y=\frac{m(b-2a)}{b(b-a)}$

attenzione ai valori generali di x e di y non meno che alle due equazioni dalle quali derivano, e d'altronde riflettasi che le nostre due incognite come esprimenti un certo numero di persone, debbono necessariamente avere dei valori interi e positivi, si renderà manifesto che i numeri rappresentati da a, b ed m non potrebbero stabilirsi a capriccio senza arrischiare di rendere

assurdo il problema. Si vede infatti che ponendo a eguale a b, più non potrebber coesistere le equazioni 1.ª e 2.ª; che i valori di x e di y sarebbero frazionarj se $b-a$ e $b(b-a)$ non fossero respettivamente summultipli di m e di $m(b-2a)$, che infine o l'una o l'altra delle due incognite risulterebbe negativa se $2a$ non fosse minore di b. Dunque, perchè il problema non sia assurdo debbono esistere certe determinate relazioni tra le quantità a, b ed m; e precisamente è necessario: 1.° che sia a diverso da b; 2.° che m si divida esattamente per $b-a$, ed $m(b-2a)$ per $b(b-a)$; 3.° che abbiasi $2a<b$.

Noteremo peraltro che mentre è assoluta l'assurdità proveniente dalla mancanza della prima di queste tre condizioni, e più in generale dalla mancanza di quelle condizioni che sono necessarie perchè le equazioni del problema non siano ripugnanti; quella invece che proviene dalla mancanza dell'altre due è relativa, perchè dipende unicamente dalle circostanze speciali e concrete del problema e non dalle relazioni astratte delle quantità: dimodochè spesso quegli stessi valori frazionarj o negativi che non valgono a risolvere il problema tal quale è dato, risolvono altri problemi analoghi a quello e che da quello deduconsi, serbandone i dati numerici, e solo introducendo nell'enunciato certe modificazioni, che dai medesimi valori frazionarj o negativi vengono suggerite. Così tornando al nostro esempio, se in primo luogo suppongasi che insieme con $a=2$, $b=5$ abbiasi $m=80$; risulterà $x=26\frac{2}{3}$ ed $y=5\frac{1}{3}$, e ciò indicherà che il problema è in qualche parte assurdo. Ma questa assurdità è evidentemente relativa, perchè dipende soltanto dalla specie delle unità concrete rappresentate da x e da y, e sparirebbe affatto se tali unità fossero divisibili. Se poi si riflette che è indifferente nel caso attuale il cercare quanti sono gli operaj e quanti i sorveglianti, oppure quante sono le giornate da pagarsi ai primi e quante quelle da pagarsi ai secondi, si fa manifesto che il solo cambiamento della domanda elimina ogni assurdità del problema senza alterarlo, e lo rende solubile coi risultati precedenti, come può facilmente verificarsi. Se in secondo luogo suppongasi che con $m=60$ sia $a=3$ e $b=5$, verrà $x=30$ ed $y=-6$; ma qui pure nel tempo medesimo che il valore negativo di y rivela un'assurdità nell'enunciato del problema, suggerisce la maniera di eliminarla. Infatti siccome le quantità negative hanno una maniera di esistere opposta a quella delle quantità positive (148), il segno $-$ che precede il valore di y sta a dirci che i sorveglianti debbono considerarsi come esistenti in uno stato affatto contrario a quello in cui li suppone il problema, ossia non come creditori ma come debitori, e che per rettificare il problema bisogna enunciarlo in tal modo che le persone rappresentate con y debbano pagare invece di esser pagate.

Equazioni del secondo grado.

240. L'equazioni del secondo grado o *quadratiche* possono tutte assai facilmente ridursi alla forma $x^2+px=q$, in cui p e q si suppongon numeri noti interi o frazionarj, positivi o negativi. Così se si abbia $3x^2+6x+5=8+5x^2+3x$, primieramente trasportando e riducendo verrà $-2x^2+3x=3$, e quindi cambiati i segni a tutta l'equazione, $2x^2-3x=-3$, e finalmente dividendo per 2, coefficiente dell'incognita al secondo grado, $x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{3}{2}$, equazione della forma che sopra. Risoluta perciò l'equazione $x^2+px=q$ saranno risolute tutte le altre.

241. Or ciò si ottiene agevolmente cominciando dal compire il quadrato del primo membro (204), cioè aggiungendo tanto a questo che all'altro il quadrato $\frac{p^2}{4}$, poi estraendo da ambedue la radice (203), il che dà $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$, equazione di 1.° grado, che risoluta darà $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$ in generale; ed $x=\pm\sqrt{q}$ nel caso particolare che sia $p=0$, e l'equazione proposta si riduca ad $x^2=q$.

242. L'incognita ha dunque qui due valori per causa del doppio segno inerente al radicale, e sono 1.° $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$, 2.° $x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$. Questi valori si chiamano ancora *radici* dell'equazione, le quali perciò saranno sempre due in un'equazione di secondo grado. In generale si dà il nome di *radice* al valore che ha l'incognita in qualunque equazione, o a quella qualunque quantità che sostituita in luogo dell'incognita soddisfa all'equazione (217).

243. Ora rapporto alle due radici precedenti è da notarsi 1.° che se q è positivo, come in $x^2-4x=5$, o se, essendo negativo, è $<\frac{p^2}{4}$, come in $x^2+6x=-1$, le radici saranno ambedue reali (192); 2.° e di più saranno razionali se $q+\frac{p^2}{4}$ sia un quadrato perfetto, come in $x^2+8x=9$; 3.° saranno poi immaginarie, e in conseguenza sarà assurda l'equazione, se q sia negativo e $>\frac{p^2}{4}$ (*ivi*), come in $x^2+5x=-20$.

244. Poichè sommando le due radici si ha $-p$, moltiplicandole si ha $-q$, perciò chiamata l'una a l'altra b, avremo $p=-a-b$, $q=-ab$. Se dunque l'equazione $x^2+px=q$ si riduca ad $x^2+px-q=0$, sostituiti i nuovi valori di p, q, sarà $x^2-ax-bx+ab=0$, ossia $x(x-a)-b(x-a)=0$, ossia $(x-a)(x-b)=0$. Dunque *il primo membro di un'equazione del secondo grado, che abbia zero nell'altro membro e l'unità per coefficiente all'* x^2, *è il prodotto di due fattori semplici del primo grado della forma* $x-a$, $x-b$, *ove*

a, b *sono le radici dell'equazione*. Così nell'equazione $x^2-5x+6=0$, che ha per radici $x=2$, $x=3$, il primo membro è il prodotto di $(x-2)(x-3)$. Vedremo nell'Algebra superiore come una consimile proprietà si verifica nell'equazioni d'ogni grado, e allora ne rileveremo la somma importanza. Intanto si osserverà che qualora si abbia un prodotto qualunque quadratico della forma x^2+fx+g, e se ne vogliano i fattori, basterà *mandarlo a zero*, cioè formarne il primo membro di un'equazione che abbia zero nel secondo: le radici di quest'equazione faranno, come è evidente, scoprire i fattori cercati.

*245. Col metodo precedente si risolvono ancora tutte quelle equazioni dei gradi superiori che o sono o si riducono della forma $x^{2m}+px^m=q$. Posto infatti $x^m=y$ e perciò $x^{2m}=y^2$, se ne deduce l'equazione di secondo grado $y^2+py=q$ che risoluta dà $y=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$, e $x^m=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(q+\frac{p^2}{4}\right)}$ ossia $x=\sqrt[m]{\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(q+\frac{p^2}{4})}\right)}$. Se si avesse m eguale a 2, verrebbe $x=\pm\sqrt{\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(q+\frac{p^2}{4})}\right)}$ formula che somministra per x i quattro valori scritti di fianco, combinando i segni $+$ e $-$ dei due radicali in tutti i modi possibili. Dunque ogni equazione di quarto grado a tre termini e della forma $x^4+px^2=q$, ha quattro radici due a due eguali in grandezza e differenti nel segno. Tutte queste radici, o due di esse potranno risultare, secondo la diversità dei casi, reali o immaginarie, razionali o irrazionali. Così per l'equazione $x^4-13x^2=-36$ si trovano le quattro radici reali e razionali $x=\pm2$, $x=\pm3$; e per l'equazione $x^4-x^2=2$ le due radici irrazionali $x=\pm\sqrt{2}$ e le due immaginarie $x=\pm\sqrt{-1}$, il che indica che quest'equazione non ha in sostanza che due sole radici.

$$x=\sqrt{\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{(q+\frac{p^2}{4})}\right)}$$
$$x=-\sqrt{\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{(q+\frac{p^2}{4})}\right)}$$
$$x=\sqrt{\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{(q+\frac{p^2}{4})}\right)}$$
$$x=-\sqrt{\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{(q+\frac{p^2}{4})}\right)}$$

*246. Le equazioni del secondo grado a più incognite portano generalmente parlando ad equazioni dei gradi superiori che non posson risolversi con le precedenti teorie. Così per darne un esempio semplicissimo, eliminando y tra le due equazioni $xy=a$, $x^2+y=b$, si cade nell'equazione di terzo grado $bx-x^3=a$. Vedremo peraltro in alcuno dei seguenti problemi come talvolta questo caso può evitarsi per mezzo di qualche industria.

247. Prob. I.° Trovare un numero x che col suo settuplo e col suo quadrato dia 144. Dunque $x^2+7x=144$. Compito il quadrato, avrò $x^2+7x+\frac{49}{4}=144+\frac{49}{4}$, ed estraendo la radice e trasponendo, $x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(144+\frac{49}{4}\right)}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{625}{4}}=-\frac{7}{2}\pm\frac{25}{2}$. Il segno $+$ dà $x=-\frac{7}{2}+\frac{25}{2}=9$; il segno

— dà $x=-\frac{7}{2}-\frac{25}{2}=-16$. Infatti $9\times9+7\times9=81+63=144$; come pure $-16\times-16+7\times-16=256-112=144$; esempio della doppia soluzione che ricevon l'equazioni del secondo grado.

Si paragoni $x^2+7x=144$ con l' equazione generale (240) $x^2+px=q$, si ha $p=7$, $q=144$; e dalle formule (241) $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}$ verrà $x=9$ ed $x=-16$.

II.° Trovare un tal numero x che, sottratto 2 dal suo quadrato, dia il resto 1. Dunque $x^2-2=1$, ed $x^2=3$; estraendo la radice, $x=\pm\sqrt{3}$: dunque la radice di 3 in + o in —, soddisfa al problema: ma essendo inassegnabile, bisogna contentarsi d'un'approssimazione.

III.° Dividere il numero 10 in due parti, il cui prodotto sia 100. Fatta x una delle parti cercate, l'altra sarà $10-x$, e il loro prodotto $10x-x^2$; onde $10x-x^2=100$, ovvero $x^2-10x=-100$ equazione che sciolta dà $x=5\pm\sqrt{(-100+25)}=5\pm\sqrt{-75}$, valore immaginario; dunque il problema è assurdo, nè si può divider 10 in due parti il cui prodotto sia 100.

*In generale rappresentando con a il numero dato e con p il prodotto delle due parti che debbon farsene, avremo $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-p\right)}$. Questa formula ci fa conoscere che i valori di x sono immaginarj, e che in conseguenza è assurdo il problema, finattantochè non sia $p<\frac{a^2}{4}$ o al più $p=\frac{a^2}{4}$. Dunque il massimo prodotto che possa aversi dalle due parti del numero a ossia da due numeri che sommati facciano a, è $\frac{a^2}{4}$; e siccome con $p=\frac{a^2}{4}$ risulta $x=\frac{1}{2}a$, ne segue anche che per ottenere il massimo prodotto, bisogna dividere a in due parti eguali.

IV.° Un numero x di persone dee pagar 342^l per egual porzione. Tre non pagando, suppliscon l'altre, il che importa a ciascuna 19^l di più. Cerco x. Si dirà: la parte di ciascuno, pagando tutti, sarebbe $\frac{342}{x}$; tre non pagando, la parte dei rimanenti è $\frac{342}{x-3}$: ma questa supera l' altra di 19, dunque $\frac{342}{x-3}-\frac{342}{x}=19$. Fatte le operazioni, si trova $x^2-3x=54$; onde $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(54+\frac{9}{4}\right)}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{225}{4}\right)}=\frac{3}{2}\pm\frac{15}{2}$; d'onde $x=9$, ovvero $=-6$. Delle due soluzioni la prima soltanto è visibilmente la cercata. Eran dunque 9 le persone, 6 delle quali pagando 57^l, hanno formata la somma di lire 342.

Riguardo al secondo valore di x osserveremo, che sebbene non sia adattato a risolvere il dato problema nel senso del suo enunciato, sodisfa ciò nonostante egualmente bene che il primo all' equazione. S' intenderà facilmente come ciò possa succedere e come talvolta possa anche avvenire che niuno dei

valori di x valga a risolvere un dato quesito, se si rifletta che in questo genere di ricerche l'Algebra è direttamente impiegata a sciogliere non il quesito ma l'equazione che ne deriva. L'Algebra generalizza il problema che le è dato a risolvere, astraendo dalle particolarità che ne limitano le soluzioni: essa somministra indistintamente tutti i valori che sodisfano alle condizioni astratte del problema, e lascia al buon senso l'esclusione di quelli che sono incompatibili colle condizioni concrete.

V.° Un Generale vorrebbe disporre dei Soldati in battaglion quadrato; ma nel suo primo disegno avanzano 124 uomini, e se aggiunge un uomo ad ogni fila, ne mancano 129. Quanta è la Truppa? Pongo $a=124$, $b=129$, x il numero dei Soldati d'una fila nel primo disegno; sarà $x+1$ il loro numero nel secondo: or nel primo la Truppa è x^2+a, nel secondo $(x+1)^2-b$; dunque $x^2+a=x^2+2x+1-b$; ed $x=\frac{a+b-1}{2}=126$; onde $x^2=15876$, ed $x^2+a=16000$, truppa cercata.

VI.° Si cercano due numeri tali, che il triplo del loro prodotto eguagli il doppio della lor somma, e la differenza de' lor quadrati. Sia x il più grande de' numeri, y il minore. Per la I.ª condizione, $2(x+y)=3xy$; per la II.ª, $3xy=x^2-y^2$, onde $2(x+y)=x^2-y^2$. Di qui $x=y+2$; il che cangia la I.ª in $4y+4=3y^2+6y$, d'onde $y=-\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{13}$, ed $x=\frac{5}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{13}$.

VII.° Gli scudi di A, B son tanti che sottratta dai lor quadrati la lor somma, si ha 78; unita questa al loro prodotto, si ha 39. Quanti sono? Gli chiamo x, y, e operando nei modi soliti, il problema, che è del secondo grado, comparisce del quarto. In tali casi potrà farsi così. Sia $2x$ la somma degli scudi, $2y$ la lor differenza: dunque (237. XII) il maggiore sarà $x+y$, il minore $x-y$. Si avrà perciò I.ª $(x+y)^2+(x-y)^2-2x=78$, cioè $39=x^2+y^2-x$; II.ª $(x+y)(x-y)+2x=39=x^2-y^2+2x$. Sommando verrà $2x^2+x=78$, che risoluta dà $x=-\frac{1}{4}+\frac{25}{4}=6$, onde $y^2=39+x-x^2=9$, $y=3$, e i numeri cercati $x+y=9$, $x-y=3$.

Problemi indeterminati di primo grado.

*248. Quando un problema dà luogo a tante equazioni quante sono le incognite, si dice che esso è determinato, perchè in tal caso le equazioni sono precisamente tutte quelle che occorrono, come sappiamo (219), per poter trovare i respettivi valori di tutte le incognite, ossia per poterle determinare. Al contrario un problema è indeterminato o più che determinato secondochè il numero delle equazioni che da esso derivano è minore o maggiore del numero delle incognite. Riguardo ai problemi più che determinati ci contenteremo di fare osservare che a rigor di termine non posson sussistere. Infatti risolute che siano tante equazioni quante sono le incognite, i valori trovati o sodisfano o non sodisfano le equazioni che restano; nel primo caso è evidente

che quest'ultime equazioni sono da rigettarsi come affatto inutili, e che perciò il problema diventa determinato; nel secondo caso è chiaro che le equazioni eccedenti il numero delle incognite esprimono delle relazioni inconciliabili con quelle espresse dalle altre, e che in conseguenza è assurdo il problema. Dunque tutti i problemi in ultima analisi sono determinati o indeterminati.

*249 Nei problemi indeterminati avendosi meno equazioni che incognite, ad alcune di queste può evidentemente attribuirsi qualunque valore arbitrario; e siccome per ogni distinto valore che si attribuisca a tali incognite, viene a cangiare quello di ognuna delle rimanenti (217), ne segue che il numero delle soluzioni sarebbe sempre infinito, se non intervenisse qualche particolare condizione a restringerlo entro certi limiti, come appunto succede quando l' indole del problema esige che i valori delle incognite risultino interi e positivi, o almeno razionali, oppure minori di un dato numero e maggiori di un altro. Con una o più di queste esigenze talvolta le soluzioni restano infinite di numero, ma spesso si riducono a poche, e qualche volta a una sola ed anche a veruna, conforme accade nei problemi determinati allorchè involgono condizioni tra loro contradittorie. Qui noi ci proponiamo di esporre la maniera di risolvere in numeri interi quei problemi indeterminati che conducono ad equazioni del primo grado soltanto.

*250. Rappresentiamo l'unica equazione proveniente da un qualunque problema indeterminato a due incognite con la formula generale $ax+by=c$, ove a, b, c sono numeri interi e noti, e ove di più supporremo $a<b$, il che può farsi senza nuocere menomamente alla generalità della formula, nulla vietando che delle due incognite si esprima con x quella affetta dal minor coefficiente. Prima di ogni altra cosa faremo osservare che l' equazione data non sarebbe solubile in numeri interi, qualora tra a e b esistesse un divisor comune d, che non fosse comune anche a c. Supposto infatti che insiemo con $\frac{a}{d}=m$ e con $\frac{b}{d}=n$, si avesse $\frac{c}{d}=p+\frac{r}{d}$, dividendo tutta l' equazione per d, risulterebbe $mx+ny=p+\frac{r}{d}$ equazione evidentemente assurda finchè i valori di x e di y son numeri interi. Se poi anche c si dividesse esattamente per d, allora questo fattore dovrà sopprimersi mediante la divisione di tutta l'equazione per d, e così i coefficienti a e b si ridurranno primi tra loro, come da ora in poi sempre li supporremo.

*251. Ciò premesso, tornando all' equazione generale e risolvendola rapporto ad x, avremo $x=\frac{c-by}{a}$; ossia, supponendo $\frac{c}{a}=q+\frac{s}{a}$, $\frac{b}{a}=p+\frac{r}{a}$ e in conseguenza $-\frac{by}{a}=-py-\frac{ry}{a}$, $x=q-py+\frac{s-ry}{a}$; cosicchè è manifesto che per avere x in numeri interi fa d' uopo attribuire ad y tutti quei valori interi che rendono intera l' espressione $\frac{s-ry}{a}$, vale a dire che bisogna risol-

vere in numeri interi la nuova equazione $\frac{s-ry}{a}=\omega$, nella quale le incognite sono y ed ω. Or questa nuova equazione, riducendosi ad $a\omega+ry=s$, non diversifica quanto alla forma dalla precedente, ma è di essa più semplice attesochè i numeri r ed s sono respettivamente minori di a e di b. Risolvendola rapporto ad y, ne dedurremo $y=\frac{s-a\omega}{r}=q_1-p_1\omega+\frac{s_1-r_1\omega}{r}$, purchè si rappresentino con q_1 e p_1 i respettivi quozienti di s e di a divisi per r e con s_1 ed r_1 i loro resti. Ma qui pure è da osservarsi che per avere in numeri interi il valore di y, bisogna trovare per ω dei numeri interi che rendano intera l'espressione $\frac{s_1-r_1\omega}{r}$. Dunque, indicando con ω_1 un numero intero qualunque, ossia una nuova indeterminata, la questione si riduce a risolvere in numeri interi l'equazione $\frac{s_1-r_1\omega}{r}=\omega_1$, che può mettersi sotto la forma $r_1\omega+r\omega_1=s_1$ e che è più semplice di ambedue le precedenti. Proseguendo ad operare e a ragionare in tal modo, si vede che la ricerca dei numeri interi atti a risolvere l'equazione $ax+by=c$ vien successivamente trasferita dall'una all'altra delle equazioni scritte di fianco. Ma in queste equazioni i coefficienti vanno a mano a mano scemando, ed è certo che o più presto o più tardi, a seconda dei valori di a e di b, deve giungersi ad un'equazione finale, che avrà l'unità per coefficiente di una delle sue incognite e che sarà risoluta in numeri interi, attribuendo all'altra incognita un valore intero qualunque. Si osserverà infatti che i coefficienti r, r_1, r_2, ec. sono i resti risultanti dalle successive divisioni di b per a, di a per r, di r per r_1, ec. e che siccome a e b per ipotesi son numeri primi tra loro (250), così uno di tali resti deve risultare eguale all'unità (46). Se poi si supponga che sia r_n questo resto, l'equazione $r_n\omega_{n-1}+r_{n-1}\omega_n=s_n$ darà, a cagione di $r_n=1$, $\omega_{n-1}=s_n-r_{n-1}\omega_n$, e quindi basterà evidentemente sostituire in luogo di ω_n un numero intero qualunque perchè risulti intero anche il valore di ω_{n-1}. Risoluta così l'ultima equazione, non resterà altro se non che porre il valore di ω_{n-1} dato per ω_n nella penultima; quello di ω_{n-2} preso da questa e dato egualmente per ω_n nella terzultima, e così risalire sino alle prime due equazioni le quali daranno in numeri interi i valori di x e di y per mezzo o *in funzione*, come suol dirsi, della stessa indeterminata ω_n alla quale potrà attribuirsi qualunque valore intero tanto positivo che negativo.

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ ry+a\omega&=s \\ r_1\omega+r\omega_1&=s_1 \\ r_2\omega_1+r_1\omega_2&=s_2 \\ \cdots & \cdots \\ r_n\omega_{n-1}+r_{n-1}\omega_n&=s_n \end{aligned}$$

*252. Debbasi, per esempio, risolvere in numeri interi l'equazione $9x+13y=200$. Isolando x, verrà $x=\frac{200-13y}{9}$, ed effettuando la divisione per 9, $x=22-y+\frac{2-4y}{9}$. Or qui è evidente che per ottenere in numeri in-

teri il valore di x, bisogna conoscere quali valori interi si debbono attribuire ad y affinchè risulti intera la quantità $\frac{2-4y}{9}$. Porremo adunque $\frac{2-4y}{9}=\omega$, intendendo di rappresentare con ω un numero intero qualunque, e risoluta questa nuova equazione rapporto ad y, giacchè essa è affetta dal minor coefficiente, avremo $y=\frac{2-9\omega}{4}$ o meglio $y=-2\omega+\frac{2-\omega}{4}$; e di qui pure potremo dedurre che i valori interi da attribuirsi ad ω per avere interi quelli di y, debbon esser tali da rendere intera la quantità $\frac{2-\omega}{4}$. Quindi, se si rappresenti con ω_1 un numero intero qualunque, la questione si ridurrà a risolvere in numeri interi l'equazione $\frac{2-\omega}{4}=\omega_1$, la quale dando $\omega=2-4\omega_1$ è visibilmente sodisfatta nel modo voluto, qualunque sia il valore intero che vogliasi attribuire ad ω_1. Riprese ora le equazioni $y=\frac{2-9\omega}{4}$, $x=\frac{200-13y}{9}$, dalla prima di queste due avremo $y=\frac{2-9(2-4\omega_1)}{4}=\frac{-16+36\omega_1}{4}=-4+9\omega_1$ e dalla seconda $x=\frac{200-13(-4+9\omega_1)}{9}=\frac{252-117\omega_1}{9}=28-13\omega_1$; cosicchè le soluzioni intere dell' equazione $9x+13y=200$ son date da $x=28-13\omega_1$ e da $y=-4+9\omega_1$, posto in luogo di ω_1 un numero intero qualunque non escluso lo zero. Se poi non si volessero che le sole soluzioni positive, osserveremo che invece di ω_1 dovrà porsi un numero positivo e maggiore di zero, perchè altrimenti risulterebbe y negativo, e che d'altronde non potrà farsi ω_1 maggiore di 2, perchè allora risulterebbe negativo il valore di x. Dunque $\omega_1=1$, $\omega_1=2$ saranno i soli valori atti a dare quelli di x e di y, e in conseguenza le soluzioni intere e positive dell'equazione $9x+13y=200$ si ridurranno a due sole, cioè ad $x=15$, $y=5$, e ad $x=2$, $y=14$.

*253. Il metodo che abbiamo esposto ha l'inconveniente di far passare per una serie di equazioni e di indeterminate ausiliari che spesso potrebbe riuscir troppo lunga. Noi senza occuparci degli espedienti particolari che possono in certi casi adottarsi per evitare o per diminuire un siffatto inconveniente, stabiliremo il principio generale da cui tutti questi espedienti dipendono. Riprendiamo perciò la formula generale $ax+by=c$. Dopo averne dedotto $x=\frac{c-by}{a}$ o meglio $x=q-py+\frac{s-ry}{a}$, sappiamo (251) che tutto si riduce a trovare quei valori interi di y che danno $\frac{s-ry}{a}$ eguale ad un qualsivoglia numero intero. In conseguenza se facciasi $\frac{s-ry}{a}=\omega$, è evidente che ω non rimarrà vincolato da verun'altra condizione fuorchè da quella di esprimere un numero intero, e che quindi si potranno impunemente effettuare soltanto sul primo membro dell'equazione $\frac{c-ry}{a}=\omega$ tutte quelle operazioni che non rendono frazionario

un numero intero e qualunque, come è quello rappresentato da ω. Ma un numero si serba intero, sia moltiplicandolo per un altro numero intero, sia accrescendolo o diminuendolo di un numero parimente intero; dunque, stabilita l'equazione $\frac{c-ry}{a}=\omega$, sarà sempre lecito moltiplicare il primo membro soltanto per qualsivoglia numero intero, ed escludere da quello stesso membro i numeri interi, che dopo tal moltiplicazione vi si trovassero contenuti.

Per vedere ora come applicando opportunamente questo principio, si eviti l'inconveniente sopra accennato, supponiamo che in qualche maniera siasi trovato un tal numero intero n che dia $\frac{rn}{a}=p_1\pm\frac{1}{a}$, esprimendo p_1 un numero intero. Moltiplicando per n il primo membro dell'equazione $\frac{s-ry}{a}=\omega$, avremo $\frac{sn-rny}{a}=\omega$, ovvero supposto $\frac{sn}{a}=q_1+\frac{s_1}{a}$ ed eseguita la divisione, $q_1-p_1y+\frac{s_1\mp y}{a}=\omega$, vale a dire, rigettando gli interi del primo membro, $\frac{s_1\mp y}{a}=\omega$, d'onde si trae immediatamente $y=\pm s_1\mp a\omega$ che dà per y un numero intero per ogni numero intero che pongasi in luogo di ω. Con ciò si fa manifesto che l'equazione $ax+by=c$ potrebbe risolversi in numeri interi con la massima speditezza e senza l'intervento di altre equazioni, se si conoscesse il numero intero n dotato della proprietà di dare $\frac{rn}{a}=p_1\pm\frac{1}{a}$ ossia $rn-ap_1=\pm1$. Vedremo in seguito (622. I.ª) come questo numero può sempre ottenersi direttamente; ma intanto, qualora non si presenti da sè medesimo, come spesso succede, il ricorrere al confronto dei successivi multipli di r con quelli di a nel modo che vedesi praticato per l'esempio seguente, somministrerà un mezzo sicuro per rintracciarlo.

Sia da risolversi in numeri interi l'equazione $17x-29y=13$. Avremo $x=\frac{29y+13}{17}=y+\frac{12y+13}{17}$. Poniamo ora $\frac{12y+13}{17}=\omega$, e per trovare il numero n per cui deve moltiplicarsi 12 affinchè $\frac{12n}{17}$ dia ±1 di resto, confrontiamo i multipli di 12, cioè 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, ec. con quelli di 17, cioè 34, 51, 68, 85, 102, ec. Risultando da questo confronto che 84 e 85 vale a dire 7×12 e 17×5 differiscono di 1, sarà 7 il numero cercato. Perciò, moltiplicando per 7 e rigettando gli interi, risulterà $\frac{-y+6}{17}=\omega$, e di qui $y=6-17\omega$. Sostituito questo valore nell'equazione $x=\frac{29y+13}{17}$, verrà $x=\frac{174-17\times29\omega+13}{17}=11-29\omega$. Sicchè i valori generali delle due incognite saranno $x=11-29\omega$, $y=6-17\omega$. Facendo $\omega=0$ risultano $x=11$, $y=6$ che come può verificarsi sodisfano la data equazione.

'254. Rappresentando con α e con β uno qualunque dei valori interi di x

e di y atti a risolvere l'equazione $ax+by=c$, dimodochè abbiasi $a\alpha+b\beta=c$, tutti gli altri valori di x e di y risulteranno dalle formule $x=\alpha+b\omega$, $y=\beta-a\omega$ ponendovi successivamente 1, 2, 3, 4, ec. —1, —2, —3, —4, ec. invece di ω. Ciò sarebbe sufficientemente provato, osservando che con $x=\alpha+b\omega$ ed $y=\beta-a\omega$, l'equazione proposta si riduce ad $a\alpha+ab\omega+b\beta-ab\omega=c$ e quindi, nell'ipotesi di $a\alpha+b\beta=c$, riman sodisfatta qualunque sia il valore intero positivo o negativo che pongasi in luogo di ω. Ma per dimostrarlo in altra maniera, togliamo $a\alpha+b\beta=c$ da $ax+by=c$; verrà $a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$, ossia $y-\beta=\frac{-a(x-\alpha)}{b}$. Or perchè in questa nuova equazione, che non è altro se non che una trasformazione della proposta, ad ogni valore intero di x ne corrisponda uno egualmente intero per y, è di evidenza esser necessario e sufficiente che $\frac{a(x-\alpha)}{b}$ sia eguale ad un numero intero qualunque positivo o negativo; e a quest'effetto, siccome a e b son primi tra loro, si richiede che $x-\alpha$ si divida esattamente per b, ossia che abbiasi $\frac{x-\alpha}{b}=\omega$ e quindi $x=\alpha+b\omega$. Ma con $\frac{x-\alpha}{b}=\omega$ l'equazione $y-\beta=-\frac{a(x-\alpha)}{b}$ dà $y-\beta=-a\omega$, ovvero $y=\beta-a\omega$: dunque $x=\alpha+b\omega$, $y=\beta-a\omega$ contengono tutte le soluzioni intere dell'equazione $ax+by=c$.

Di qui ne segue: 1.° che tutti i successivi valori interi di x, egualmente che quelli di y, differiscono l'uno dall'altro della medesima quantità; cioè di b quelli di x, e di a quelli di y: 2.° che il numero delle soluzioni con valori negativi, qualunque sia la grandezza e il segno di ognuno dei numeri rappresentati da a, b e c, è sempre infinito: 3.° che anche il numero delle soluzioni totalmente positive procede all'infinito, se a e b sono di segno contrario; imperciocchè allora i valori generati di x e di y diventano $x=\alpha+b\omega$, $y=\beta+a\omega$ quando a è negativa, ed $x=\alpha-b\omega$, $y=\beta-a\omega$ quando è negativo b; ed è evidente che ad ognuno degli infiniti valori positivi di ω nel primo caso, e ad ognuno degli infiniti valori negativi di ω nel secondo, corrisponderà sempre un valore positivo tanto per x come per y: 4.° che le soluzioni positive son limitate di numero quando a e b hanno il medesimo segno, vale a dire sono ambedue positive, bastando cangiare il segno a tutta l'equazione se mai fossero negative; perchè in tal caso tornano ad aver luogo le formule $x=\alpha+b\omega$, $y=\beta-a\omega$ le quali ci mostrano non potersi attribuire ad ω nè un valore negativo maggiore di $\frac{\alpha}{b}$ che darebbe un valore negativo per x, nè un valore positivo maggiore di $\frac{\beta}{a}$ che ne darebbe uno negativo per y.

*255. Passiamo adesso a risolvere in numeri interi due equazioni a tre incognite come sono $ax+by+cz=d$, $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$. Eliminando z tra queste due equazioni, ne risulterà un'equazione a due incognite che potremo rappresentare con $mx+ny=p$; e che risoluta col metodo precedente darà

$x=\alpha+n\omega$, $y=\beta-m\omega$. Sostituiti questi valori in una delle due date, avremo ancora un' altra equazione tra l' incognita z e l' indeterminata ω; e questa pure, risoluta nel solito modo, somministrerà i valori di z e di ω in funzione di una nuova indeterminata ω_1. Infine posto il valore di ω tanto in $x=\alpha+n\omega$ quanto in $y=\beta-m\omega$, otterremo i valori interi delle tre incognite dati tutti per ω_1. Abbiansi per esempio le equazioni 1.ª $9x+7y+5z=38$, 2.ª $8x-3y+10z=32$. Sottraendo la 2.ª dal doppio della 1.ª, si trova $10x+17y=44$, che dà 3.ª $x=\frac{44-17y}{10}=4-y+\frac{4-7y}{10}$. Posto ora $\frac{4-7y}{10}=\omega$, poscia moltiplicando per 3 ed escludendo gli interi, risulta $\frac{2-y}{10}=\omega$ e in conseguenza 4.ª $y=2-10\omega$, valore che sostituito nella 3.ª somministra 5.ª $x=1+17\omega$. Con questi valori di x e di y, la 1.ª diventa $5z+83\omega=15$, da cui si deduce 6.ª $z=\frac{15-83\omega}{5}=3-16\omega-\frac{3\omega}{5}$, e quindi $\frac{3\omega}{5}=\omega_1$, o meglio $\frac{\omega}{5}=\omega_1$, e perciò $\omega=5\omega_1$. Sostituendo infine questo valore di ω nella 5.ª, 4.ª e 6.ª, risultano $x=1+85\omega_1$, $y=2-50\omega_1$, $z=3-83\omega_1$. Fatto $\omega_1=0$, si ottiene $x=1$, $y=2$, $z=3$ e son questi i soli valori positivi che risolvano le date equazioni, giacchè con $\omega_1>0$ risultano negativi i valori di y e di z, e con $\omega_1<0$ risulta negativo il valore di x.

Se in tre equazioni si avessero le quattro incognite x, x_1, x_2, x_3, è chiaro che, eliminando x_3, si ricadrebbe nel caso or contemplato, e che dopo aver trovati i valori delle rimanenti incognite x, x_1, x_2, e dopo averli sostituiti in una delle tre equazioni date, rimarrebbe soltanto a risolversi una nuova equazione tra x_3 ed ω_1, e a sostituire il valore di ω_1 dato da quest' ultima per ω_2 nei precedenti valori di x, x_1, x_2 e x_3. Sicchè in questo modo potremo in generale risolvere in numeri interi n equazioni con $n+1$ incognite.

*256. Supponiamo finalmente che voglia risolversi in numeri interi e positivi una sola equazione con più di due incognite. Se in primo luogo si abbia $ax+by+cz=d$, pongo 1 in luogo dell' incognita affetta dal maggior coefficiente, che supporrò essere z, e ridotta così la proposta equazione ad avere due incognite, la risolvo secondo il solito (251). Ripeto la medesima operazione con $z=2$, $=3$, ec. finchè una delle due incognite x, y non risulta eguale a zero o negativa, e le soluzioni ottenute così saranno manifestamente quelle richieste. Operando in tal modo sull' equazione $4x+5y+7z=41$ si troveranno quattro soluzioni; cioè due con $z=1$, una con $z=2$, veruna con $z=3$, ed una con $z=4$. Se in secondo luogo sia da risolversi l' equazione $au+bx+cy+dz=e$, supposti c e d i massimi coefficienti e di più $d>c$, insieme con $z=1$ faccio $y=1,=2,=3$, ec. ed opero come sopra; quindi ripeto lo stesso calcolo con $z=2$ e con $y=1,=2,=3$, ec.; con $z=3$ ed $y=1,=2,=3$, ec. continuando con l' ordine stesso finchè ho valori positivi per u e per x. L' equazione $4u+5x+7y+9z=58$ maneggiata così, darà 12 soluzioni. In

simil guisa potrebbe risolversi un' equazione con sei, con sette e in generale con n incognite.

*257. Termineremo questo brevissimo saggio dell'analisi indeterminata, con la soluzione dei seguenti problemi.

I.° Con monete di 5 e di 10 paoli in quanti modi può farsi la somma di paoli 405? Indicando con x le monete di 5 paoli, con y quelle di dieci, si ha l' equazione $5x+10y=405$ che divisa per 5 e risoluta rapporto ad x, dà $x=81-2y$. Di qui si vede che y deve esser minore di $\frac{81}{2}$ affinchè x sia positivo, e che in conseguenza i modi cercati sono 40.

II.° Con 40 lire sono stati comprati 20 animali di tre specie differenti, pagando 6 lire l' uno quelli della prima specie, 4 lire l'uno quelli della seconda, e una lira l' uno quelli della terza. Si domanda quanti ne sono stati acquistati di ciascheduna specie. Siano x, y, z, i respettivi numeri che si cercano. Avremo facilmente le due equazioni $x+y+z=20$, $6x+4y+z=40$, che sottratte daranno $5x+3y=20$, e quindi $y=\frac{20-5x}{3}=6-2x+\frac{2+x}{3}$; d' onde dedurremo $x=3\omega-2$ ed $y=10-5\omega$. Con questi valori la prima equazione si cangia nell' altra $z-2\omega=12$ e da questa si deduce immediatamente $z=12+2\omega$. Abbiamo dunque $x=3\omega-2$, $y=10-5\omega$, $z=12+2\omega$. E siccome con ω maggiore o minore di 1 alcune delle incognite risulterebbero negative, i soli valori atti a risolvere il dato problema saranno quelli che si ottengono con $\omega=1$, cioè $x=1$, $y=5$, $z=14$.

III.° Un avaro ha dei sacchetti di monete: contandoli a 3 a 3, non vi è avanzo; contandoli a 7 a 7, ne avanza uno; contandoli a 10 a 10, ne avanzano 6: i sacchetti son più di 100 e meno di 300; se ne cerca il numero x. Indicando con ω, ω_1, ω_2 tre numeri interi, avremo 1.ª $x=3\omega$, 2.ª $x=7\omega_1+1$, 3.ª $x=10\omega_2+6$, e dovrà evidentemente essere 4.ª $3\omega=7\omega_1+1$, 5.ª $7\omega_1+1=10\omega_2+6$. Dalla quarta si trae $\omega=\frac{7\omega_1+1}{3}=2\omega_1+\frac{\omega_1+1}{3}$, e fatto $\frac{\omega_1+1}{3}=u$, $\omega_1=3u-1$ valore che posto nella 5.ª, dà $21u-6=10\omega_2+6$, o meglio $10\omega_2=21u-12$. Risolvendo quest'equazione, si trova $\omega_2=\frac{21u-12}{10}=2u-1+\frac{u-2}{10}$ e, posto $\frac{u-2}{10}=u_1$, $u=10u_1+2$, e in conseguenza $\omega_2=21u_1+3$. Sostituito questo valore di ω_2 nella 3.ª, si ottiene finalmente $x=210u_1+36$; e siccome ponendo $u_1=0,=1,=2$. ec. risulta $x=36,=246,=456$, ec., si conclude che i sacchetti dell' avaro sono 246.

IV.° Qual fu l' anno dell' Era volgare nel quale si ebbe 17 di Ciclo Solare, 6 di Ciclo Lunare e 5 d' Indizione, sapendosi che questi cicli sono periodi della respettiva durata di anni 28, 19 e 15? Rappresentando con x l'anno cercato, dovranno verificarsi le equazioni 1.ª $x=28\omega+17$, 2.ª $x=19\omega_1+6$, 3.ª $x=15\omega_2+5$ e per conseguenza anche le altre due $28\omega+17=19\omega_1+6$, $19\omega_1+6=15\omega_2+5$ cioè 4.ª $28\omega+11=19\omega_1$, 5.ª $19\omega_1+1=15\omega_2$. Risol-

vendo la 4.ª rapporto ad ω_1, si avrà $\omega_1 = \frac{28\omega+11}{19} = \omega + \frac{9\omega+11}{19}$. Ponendo $\frac{9\omega+11}{19} = u$, poi moltiplicando per -2, ed escludendo gli interi, verrà $\frac{\omega-3}{19} = u$, d'onde si trarrà $\omega = 19u+3$ e quindi $\omega_1 = 28u+5$. Ma la 5.ª con questo valore di ω_1, si cangia in $\omega_2 = \frac{532u+96}{15}$, equazione che, risoluta nel solito modo, dà $\omega_2 = 532u_1 + 432$, e con ciò dalla 3.ª si ha $x = 7980u_1 + 6485$; dunque siccome con $u_1 = 0, = 1$, ec. risulterebbe $x = 6485, = 14465$, ec. e per ridurre all' Era Cristiana queste epoche che appartengono al così detto Periodo Giuliano, fa d'uopo diminuirle di 4713, e allora i valori di x diventano 1772, 9752, ec. concluderemo che il 1772 fu l'anno in cui si ebbe 17 di Ciclo Solare, 6 di Ciclo Lunare e 5 d'Indizione, e che la medesima combinazione di cicli non avrà luogo una seconda volta prima del 9752.

Progressioni.

258. Si dà il nome di *progressione* ad una serie di numeri collegati fra loro in maniera, che il primo stia al secondo, come il secondo al terzo, come il terzo al quarto, ec. Se il rapporto costante di un numero all'altro è aritmetico (125), la progressione è aritmetica; se geometrico, la progressione è geometrica. Così i numeri 1, 3, 5, 7, 9, ec., ciascun dei quali differisce costantemente di due unità dal suo antecedente, formano una progressione aritmetica; mentre i numeri 1, 3, 9, 27, 81, ec., ciascun dei quali è triplo di quello che lo precede, formano una progressione geometrica. La prima si accenna scrivendo $\div 1:3:5:7:9:$ ec., la seconda scrivendo semplicemente $1:3:9:27:81:$ ec. La ragione o rapporto costante si chiama *differenza* nelle progressioni aritmetiche, *quoziente* nelle geometriche; e di qui l'uso modernamente introdotto di chiamar le prime *progressioni per differenza*, le seconde *progressioni per quoziente*.

Le progressioni son crescenti o decrescenti, secondochè i loro termini dal primo all'ultimo vanno o crescendo o diminuendo di valore. Nelle crescenti aritmetiche ciascun termine si forma aggiungendo al suo precedente la differenza, nelle decrescenti togliendola. Nelle geometriche ogni termine si ha moltiplicando quello che lo precede per il quoziente se son crescenti, dividendolo se decrescenti. Tutto questo è evidente; supposto perciò a il primo termine, d la differenza, q il quoziente ed n il numero dei termini di ciascuna di queste specie di progressioni, avremo le quattro seguenti formule generali:

I.ª $\div a : a+d : a+2d : a+3d : a+4d \ldots\ldots : a+(n-1)d$

II.ª $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 \ldots\ldots : aq^{n-1}$

III.ª $\div a : a-d : a-2d : a-3d : a-4d \ldots\ldots : a-(n-1)d$

IV.ª $a : \frac{a}{q} : \frac{a}{q^2} : \frac{a}{q^3} : \frac{a}{q^4} : \frac{a}{q^5} \ldots\ldots : \frac{a}{q^{n-1}}$

Che anzi, poichè la III.ª e IV.ª che servono per le decrescenti non sono in sostanza che la I.ª e II.ª, cangiato per l'una il d in $-d$, per l'altra il q in $\frac{1}{q}$, omesse affatto quelle, potremo soltanto ritener queste, avvertendo di introdurvi i suddetti respettivi cangiamenti qualora in luogo di progressioni crescenti si tratti di progressioni decrescenti.

259. Ciò premesso, si tratti di trovar la somma s dei primi n termini di una progressione. Se questa è geometrica, avremo $s=a+aq+aq^2+aq^3+$ ec.... $+aq^{n-1}=a(1+q+q^2+q^3+$ ec.... $+q^{n-1})=$(166. III.ª)$\frac{a(q^n-1)}{q-1}$. Se è aritmetica, osserveremo che chiamandone ω l'ultimo termine, ed invertendola, si cangia nell'identica decrescente $\div\ \omega : \omega-d : \omega-2d : \omega-3d : \ldots\ldots : \omega-(n-1)d$. Frattanto dalla diretta si ha $s=an+d\left(1+2+3+\text{ec}\ldots\ldots+(n-1)\right)$, e dalla inversa $s=\omega n-d\left(1+2+3+\text{ ec}\ldots\ldots+(n-1)\right)$: sommando quindi le due espressioni, avremo $2s=an+\omega n$, e quindi $s=\frac{n}{2}(a+\omega)$.

260. Poichè insieme con $s=\frac{n}{2}(a+\omega)$ si ha nelle progressioni aritmetiche $\omega=a+(n-1)d$; e insieme con $s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$ si ha nelle geometriche $\omega=aq^{n-1}$, combinando respettivamente fra loro queste doppie formule, potran dedursene le quaranta seguenti, per cui date tre delle cinque quantità a, d, n, s, ω nelle progressioni aritmetiche, a, q, n, s, ω nelle geometriche, si ha qualunque delle altre due, purchè per alcune delle geometriche, e precisamente per quelle che danno n, si conosca la teoria dei logaritmi.

Per le Progressioni aritmetiche.

261. $a=\omega-d(n-1), =\frac{s}{n}-\frac{d(n-1)}{2}, =\frac{1}{2}d\pm\sqrt{\left((\omega+\frac{d}{2})^2-2ds\right)}, =\frac{2s}{n}-\omega.$

262. $d=\frac{\omega-a}{n-1}, =\frac{2(s-an)}{n(n-1)}, =\frac{\omega^2-a^2}{2s-a-\omega}, =\frac{2(\omega n-s)}{n(n-1)}.$

263. $n=1+\frac{\omega-a}{d}, =\frac{1}{2}-\frac{a}{d}\pm\sqrt{\left(\frac{2s}{d}+(\frac{a}{d}-\frac{1}{2})^2\right)}, =\frac{2s}{a+\omega}, = \ldots\ldots$
$\frac{1}{2}+\frac{\omega}{d}\pm\sqrt{\left((\frac{\omega}{d}+\frac{1}{2})^2-\frac{2s}{d}\right)}.$

264. $\omega=a+d(n-1), =\frac{2s}{n}-a, =-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{\left(2ds+(a-\frac{d}{2})^2\right)}, = \ldots$
$\frac{s}{n}+\frac{d(n-1)}{2}.$

265. $s=\frac{n}{2}(a+\omega), =n\left(a+d(\frac{n-1}{2})\right), =(\frac{\omega+a}{2})(1+\frac{\omega-a}{d}), =n\left(\omega-d(\frac{n-1}{2})\right).$

Per le Progressioni geometriche.

266. $a=\frac{\omega}{q^{n-1}}$; $a=s\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$; $a=q(\omega-s)+s$; $a(s-a)^{n-1}=\omega(s-\omega)^{n-1}$

267. $q=\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$; $q^n-\frac{s}{a}q+\frac{s}{a}-1=0$; $q=\frac{s-a}{s-\omega}$; $q^n-\frac{s}{s-\omega}q^{n-1}+\frac{\omega}{s-\omega}=0$.

268. $n=1+\frac{L\omega-La}{Lq}, =1+\frac{L\omega-La}{L(s-a)-L(s-\omega)}, =\frac{L(a+s(q-1))-La}{Lq}, = \ldots$
$1+\frac{L\omega-L(\omega q-s(q-1))}{Lq}$.

269. $\omega=aq^{n-1}$; $\omega(s-\omega)^{n-1}=a(s-a)^{n-1}$; $\omega=s-\frac{(s-a)}{q}, =sq^{n-1}\left(\frac{q-1}{q^n-1}\right)$.

270. $s=\frac{\sqrt[n-1]{\omega^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{\omega}-\sqrt[n-1]{a}}, =a\frac{(q^n-1)}{q-1}, =\frac{\omega q-a}{q-1}, =\frac{\omega}{q^{n-1}}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$.

271. Sono osservabili le seguenti particolarità. 1.ª La somma di qualunque numero n di termini della progressione aritmetica 1, 3, 5, ec. dà sempre un quadrato. Infatti avendosi $a=1$, $d=2$, sarà (265), $s=n\left(a+\frac{d(n-1)}{2}\right)=n^2$. 2.ª La somma della progressione aritmetica 1, 2, 3, ec. dando $s=\frac{n(n+1)}{2}$, si avrà $8s=4n\times(n+1)=(2n+1)^2-1$; e di qui *ogni quadrato impari diminuito di un' unità è multiplo d'* 8. 3.ª Poichè per la progressione $1:q:q^2:\ldots q^{n-1}$ si ha $s=\frac{q^n-1}{q-1}$ (270), quantità che con q intero, è minore di q^n; perciò ogni *potenza* n^{sima} *di qualunque intero* q *supera la somma di tutte le sue precedenti.* 4.ª *I termini di una progressione aritmetica o geometrica sommati ad* m *ad* m, *danno una nuova progressione aritmetica o geometrica, la cui differenza* d_1 *eguaglia* dm^2, *e il quoziente* q_1 *eguaglia* q^m. Infatti la somma dei primi m termini sarà (265) $m(a+\frac{d(m-1)}{2})$, o (270) $\frac{a(q^m-1)}{q-1}$; per quella dei secondi, il primo dei quali è $a+md$ o aq^m, si troverà $m\left(a+md+\frac{d(m-1)}{2}\right)$ o $\frac{aq^m(q^m-1)}{q-1}$; per quella dei terzi, il primo dei quali è $a+2md$, o aq^{2m}, si troverà $m\left(a+2md+\frac{d(m-1)}{2}\right)$, ovvero $\frac{aq^{2m}(q^m-1)}{q-1}$, ec. ed è evidente che queste somme formano due progressioni, l'una delle quali ha dm^2 per differenza l'altra q^m per quoziente.

272. Applicazioni. I. Si sa dopo *Galileo* che cadendo un corpo per solo impulso di gravità, scorre nel primo minuto secondo di sua caduta metri 4,9 incirca; 14,7 nel secondo, e così successivamente sempre aumentando di

egual differenza. Si cerca quanto spazio s avrà percorso alla fine di sei secondi, e quanto nell'ultimo. Qui si ha una progressione aritmetica in cui son dati $a=4,9$; $d=9,8$; $n=6$: sarà dunque (265) $s=6\left(4,9+\frac{9,8\times5}{2}\right)=176,4$ ed $\omega=4,9+5\times9,8=53,9$. Sicchè lo spazio percorso in sei minuti secondi è metri 176 e 4 decimetri incirca, e lo spazio percorso nel sesto minuto secondo è poco meno di 54 metri.

II. Tra l'istante in cui lasciai cadere un piccol grave in una voragine, e quello in cui mi giunse all'orecchio il suono della percossa, scorsero 6 minuti secondi. Supposta la stessa legge che sopra, e di più che il suono percorra uniformemente 340 metri per ogni secondo, cerco la profondità s della voragine.

Qui il tempo impiegato dal grave in discendere è ignoto: lo chiamo x; sarà dunque $n=x$, e (265) $s=4,9x^2$. D' altronde poichè il suono ha percorso lo stesso spazio s in $6-x$ secondi facendo 340 metri in ogni secondo, avremo $s=340\times(6-x)$. Di qui l' equazione $4,9x^2=340(6-x)$, dalla quale si ha $x=5,55$ e in conseguenza $s=150$ metri.

III. Suppongasi che un seme di grano seminato in un terreno di media feracità non ne riproduca che sei, e che la raccolta d'ogni anno s' impieghi totalmente in nuova sementa, la quale si riproduca costantemente e senza alcuna perdita nella medesima proporzione; si domanda qual diverrà dopo 10 anni. Abbiamo una progressione geometrica in cui $a=1$, $q=6$, $n=10$ e si cerca ω. Sarà dunque (269) $\omega=aq^{n-1}=6^9=10077696$. Onde posto il sacco di 150 libbre, ed un seme corrispondente in peso ad un grano (97), si troveranno sacca 9,72, cioè (96) litri 710,42.

IV. Due vascelli partono nel tempo stesso da due luoghi 100 leghe fra loro lontani per incontrarsi: e il primo raddoppiando, l'altro rinterzando giornalmente il viaggio, che nel primo giorno fu eguale per ambedue, si trovano dopo quattro giorni. Cerco il viaggio di ciascheduno, e quanto fecero nel primo e nell' ultimo giorno. Qui abbiamo due progressioni geometriche, di cui non è noto che il numero $n=4$ dei termini e il quoziente, che nella prima è $q=2$, nell'altra $q_1=3$. Sappiamo però che chiamati s, s_1 i viaggi cercati, a, a_1 quelli del primo giorno, si ha $s_1=100-s$ ed $a=a_1$. Avremo dunque le due equazioni (270) $s=15a$, $s_1=40a=100-s$. Di qui $s=27,27273$, $s_1=72,72727$, $a=1,81818$, ... $\omega=14,54545$, ed $\omega_1=49,09091$.

V. Un giocatore aggiunge sempre 2 alla sua posta, ed un altro sempre la raddoppia; la prima volta giocaron 3, e perderono dieci volte; cerco le perdite. La progressione per il primo è aritmetica, per il secondo geometrica, ed abbiamo $a=3$, $d=q=2$, $n=10$; dunque il primo perdè $s=120$ (265), il secondo $s=3069$ (270).

VI. Tra due termini a, ω inserire m termini in progressione. Basterà dunque trovar d o q; e poichè abbiamo a, ω ed $n=m+2$, verrà $d=\frac{\omega-a}{m+1}$ (262),

$q=\sqrt[m+1]{\frac{\omega}{a}}$ (267). Così se $m=4$, sarà $d=\frac{\omega-a}{5}$, $q=\sqrt[5]{\frac{\omega}{a}}$, e $\div a:\frac{4a+\omega}{5}$ . . . $\frac{3a+2\omega}{5}:\frac{2a+3\omega}{5}:\frac{a+4\omega}{5}:\omega$; del pari $a:\sqrt[5]{a^4\omega}:\sqrt[5]{a^3\omega^2}:\sqrt[5]{a^2\omega^3}:\sqrt[5]{a\omega^4}:\omega$.

VII. Vogliasi la somma della progressione geometrica decrescente ed infinita $a:\frac{a}{q}:\frac{a}{q^2}:\frac{a}{q^3}:$ ec. La natura di questa progressione, fatti nelle formule i debiti cangiamenti (258), dà in generale $s=\frac{a\left(\frac{1}{q^n}-1\right)}{\frac{1}{q}-1}$, ed inoltre $\omega=\frac{a}{q^{n-1}}$ per il termine n^{simo}, e quindi $\frac{a}{q^n}$ per il suo susseguente $(n+1)^{simo}$. Ma se la progressione si prenda fino all'infinito, e quindi sotto il numero n si comprendano tutti quanti mai sono i suoi termini fino al più piccolo possibile, il termine $(n+1)^{simo}$ dovrà esser nullo, d'onde $\frac{a}{q^n}=0$, e perciò $\frac{1}{q^n}=0$. Avremo dunque per la somma cercata $s=\frac{a}{1-\frac{1}{q}}$. Così per la progressione $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{2^2}:\frac{1}{2^3}:$ ec. in infinito, ove $a=1$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$, sarà $s=2$.

*273. Se nella formula $s=a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$ si supponga $q=10$, avremo $s=a\left(\frac{10^n-1}{9}\right)$, e perciò $\frac{10^n a}{9}=s+\frac{a}{9}$: dunque ogni potenza del 10 moltiplicata per un numero a, dà un quoziente intero $s=a(1+10+10^2+\text{ec.}+10^{n-1})$ (166. III.°) ed un resto a, se a è un numero semplice, o lo stesso resto che si avrebbe da a, se a è un numero composto. Segue di qui che qualunque numero N diviso per 9 dà lo stesso resto che si avrebbe dividendo per 9 la somma S delle sue cifre. Siano infatti a, b, c, d, ec., z le unità, le diecine, le centinaia, ec. del numero N nel quale supporremo n cifre. Si avrà evidentemente $N=a+10b+10^2c+10^3d+\text{ ec. }+10^{n-1}z$, e quindi $\frac{N}{9}=\frac{a}{9}+\frac{10b}{9}+\frac{10^2c}{9}+\frac{10^3d}{9}+\text{ ec. }+\frac{10^{n-1}z}{9}$, ossia in forza del principio precedente, $\frac{N}{9}=s+s_1+s_2+\text{ ec. }+\frac{a+b+c+d+\text{ec.}+z}{9}$, il che dimostra appunto ciò che voleva provarsi. Di qui possiamo concludere che un dato numero sarà divisibile esattamente per 9 o per 3 se la somma delle sue cifre sarà un multiplo di 9 o di 3.

274. Siamo adesso in grado di dimostrare, come di già promettemmo, la regola della riprova del 9 (25). Sieno F, F_1 i due fattori, P il loro prodotto r, r_1, R, R_1 i quattro resti che si ottengono operando secondo la regola sopra i due fattori, sul loro prodotto, e sul prodotto rr_1; ed infine q, q_1, q_2 i quozienti interi che risulterebbero facendo effettivamente la divisione per 9 di F, F_1, rr_1. Avremo (31. 1.°) $F=9q+r$, $F_1=9q_1+r_1$, $rr_1=9q_2+R_1$, ed $FF_1=(9q+r)(9q_1+r_1)$, cioè, sviluppando e introducendo il valore di rr_1,

$FF_1 = 9(9qq_1 + rq_1 + r_1q + q_2) + R_1$, espressione che divisa per 9 dà visibilmente il resto R_1. Ma da P si ha in ipotesi il resto R: converrà dunque che sia $R_1 = R$, se $FF_1 = P$, cioè se l'operazione è ben fatta.

Serie numeriche.

275. Dicesi *Serie* un seguito di termini, che crescono o scemano con una certa legge, come appunto sarebbero le progressioni. Una serie è ***numerica*** o ***algebrica***, secondochè sono numerici o algebrici i termini che la compongono: è ***finita*** o ***infinita*** quando ha un numero finito o infinito di termini: è ***divergente*** o ***convergente*** secondo che i suoi termini crescono o scemano di valore, e diverge o converge tanto più rapidamente, quanto più il valor di ciascun termine cresce o scema riguardo al precedente.

276. Diconsi ***prime differenze*** d'una serie le differenze tra i suoi termini contigui, ***seconde***, ***terze***, ec. le differenze tra i contigui termini delle prime, delle seconde ec., nel modo che vedonsi nella di contro serie, che è quella dei cubi.

1, 8, 27, 64, 125, 216, ec.	
7, 19, 37, 61, 91, ec.	1.ᵉ Dif.
12, 18, 24, 30, ec.	2.ᵉ
6, 6, 6, ec.	3.ᵉ
0, 0, ec.	4.ᵉ

277. Prendiamo qui unicamente a parlare di quelle serie ***numeriche***, le quali hanno costante o uniforme un ordine qualunque di differenze, e le distingueremo col nome di serie del prim'ordine, del secondo, del terzo, dell'm^{simo}, secondo che queste differenze costanti saranno le prime, le seconde, le terze, l'm^{sime}. Quella che sopra abbiamo arrecata in esempio è dunque del terz'ordine, perchè le differenze costanti sono appunto le terze.

278. Le principali e più ovvie tra le serie numeriche sono quelle dei numeri ***figurati***, dei ***poligoni*** e delle ***potenze***. Si hanno l'ultime elevando a qualunque potenza m^{sima} i numeri naturali 1, 2, 3, ec., e ciascuna è sempre dell'ordine corrispondente al grado della potenza. Così abbiamo veduto di sopra (276) essere appunto del terz'ordine quella dei cubi. Ecco quelle dei figurati e dei poligoni, con le loro particolari denominazioni.

Numeri figurati		Numeri poligoni	
1, 2, 3, 4, 5, ec.	Naturali	1, 3, 6, 10, 15, ec.	Triangolari
1, 3, 6, 10, 15, ec.	Triangolari	1, 4, 9, 16, 25, ec.	Quadrati
1, 4, 10, 20, 35, ec.	Piramidali	1, 5, 12, 22, 35, ec.	Pentagoni
ec. ec. ec.		ec. ec. ec.	

Quelle dei figurati cominciando dal prim'ordine passano per tutti i seguenti, e ciascun loro termine n^{simo} è la somma dei primi n termini della serie superiore. Quelle dei poligoni son tutte del second'ordine, e ciascun loro termine n^{simo} è la somma di n termini delle progressioni aritmetiche 1, 2, 3, ec.; 1, 3, 5, 7, ec.; 1, 4, 7, 10, ec., che cominciano tutte dall'unità, ed hanno per respettive differenze 1, 2, 3, ec.

279. Le principali operazioni da farsi sopra una serie son quelle di tro-

varne i termini *Generale* e *Sommatorio*. Il primo, che chiameremo T, dà l'espressione generale di qualunque termine n^{simo}; e l'altro, che chiameremo S, dà la somma di n termini, quando se ne conoscono alcuni dei primi. Così il termine generale della serie di second' ordine 1, 6, 21, 52, 105, ec. è, come tra poco vedremo, $T=n^3-n^2+n$, perchè infatti posto $n=1, =2, =3, =4, =5$, ec. si hanno i termini 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, 5.°, ec. della serie. Egualmente $S=n\left(a+d\frac{(n-1)}{2}\right)$ è il termine sommatorio d'ogni progressione aritmetica (265).

280. Cominciando frattanto dalla ricerca del termine generale, si supponga a, a_1, a_2, a_3, ec. la serie data; saranno

$a_1-a,\ a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ a_4-a_3,\ a_5-a_4$, ec. le 1.e differenze
$a_2-2a_1+a,\ a_3-2a_2+a_1,\ a_4-2a_3+a_2,\ a_5-2a_4+a_3$, ec. le 2.e
$a_3-3a_2+3a_1-a,\ a_4-3a_3+3a_2-a_1,\ a_5-3a_4+3a_3-a_2$, ec. le 3.e
$a_4-4a_3+6a_2-4a_1+a,\ a_5-4a_4+6a_3-4a_2+a_1$, ec. le 4.e
$a_5-5a_4+10a_3-10a_2+5a_1-a$, ec. le 5.e

e chiamate d_1, d_2, d_3, d_4, ec. le prime fra le differenze prime, seconde, terze, quarte, ec. avremo

$$d_1=a_1-a$$
$$d_2=a_2-2a_1+a$$
$$d_3=a_3-3a_2+3a_1-a$$
$$d_4=a_4-4a_3+6a_2-4a_1+a$$
$$d_5=a_5-5a_4+10a_3-10a_2+5a_1-a$$
ec. ec. ec.

valori che potranno continuarsi quanto si vorrà.

Intanto da essi possiamo dedurre i valori di ciascun termine della serie, dati per il primo termine e per le differenze d_1, d_2, d_3, ec., cioè

per il 2.° termine $a_1=a+d_1$
per il 3.° $a_2=a+2d_1+d_2$
per il 4.° $a_3=a+3d_1+3d_2+d_3$
per il 5.° $a_4=a+4d_1+6d_2+4d_3+d_4$
per il 6.° $a_5=a+5d_1+10d_2+10d_3+5d_4+d_5$

Ora in queste espressioni l'andamento della parte letterale è manifesto; e quanto ai coefficienti numerici ben si vede che procedono secondo quelli delle successive potenze del binomio $a+b$ (208), in modo che nel valore del 2.° termine si riscontrano i coefficienti della 1.a potenza, in quelli del 3.° i coefficienti della 2.a in quelli del 4.°, 5.°, 6.°, ec. i coefficienti della 3.a, 4.a, 5.a, ec. Dunque nel valor cercato del termine n^{simo} o generale, si avranno i coefficienti della potenza $n-1$, e perciò sarà $T=a+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}d_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3}d_3+$ec.

281. Sia per esempio la serie 1, 6, 21, 52, 105, ec. Costruite le differenze, si troveranno $d_1=5$, $d_2=10$, $d_3=6$, $d_4=0=d_5=d_6$ ec. Quindi poichè $a=1$, sarà $T=1+5(n-1)+5(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)(n-3)=n^3-n^2+n$; e se $n=10$, avremo per decimo termine 910.

282. Si riprendano adesso i valori di a, a_1, a_2, a_3, ec. (280), e si sommino partitamente i primi due, i primi tre, i primi quattro, ec. Troveremo per la somma

dei primi due $2a+d_1$
dei primi tre $3a+3d_1+d_2$
dei primi quattro $4a+6d_1+4d_2+d_3$
dei primi cinque $5a+10d_1+10d_2+5d_3+d_4$

d'onde con un raziocinio analogo a quello adoprato nello stabilire il term.^e Generale T, concluderemo per il term.^e Sommatorio S, ossia per la somma di n termini della serie proposta,

$$S=an+\frac{n(n-1)}{2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}d_2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}d_3+\text{ec.}$$

Così per la serie dei numeri Naturali, ove $a=1$, $d_1=1$, $d_2=0=d_3=$ ec. sarà $S=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$. Per quella dei Triangolari, ove $a=1$, $d_1=2$, $d_2=1$, $d_3=0$, avremo

$$S=n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$$

e se $n=10$, avremo $S=220$.

283. Le differenze prime, seconde, ec. di una serie dell'ordine m, sono esse pure altrettante serie dell'ordine $m-1$, $m-2$, $m-3$, ec.; onde una serie qualunque può sempre riguardarsi come composta o delle differenze di un'altra serie di un ordine immediatamente superiore, o delle somme successive dei termini d'una serie d'ordine immediatamente inferiore, aumentate di una quantità costante, cioè del termine iniziale della serie proposta. Così la serie 15, 65, 175, 369, 671, ec. del 3.° ordine, nasce dalle differenze dell'altra del 4.° 1, 16, 81, 256, 625, ec.; come questa nasce all'opposto dalle somme dei successivi termini della prima, tutte aumentate del termine iniziale 1. Ciò somministra dei nuovi mezzi per ottener l'espressione già trovata (282) del termine Sommatorio. Sia infatti a, a_1, a_2, a_3, una data serie, che per comodo chiameremo B, formata dalle differenze di un'altra serie, che chiameremo A. Sia di più f il primo termine della serie A. È manifesto: 1.° che dovendo questa aver per differenze prime a, a_1, a_2, ec., gli altri suoi termini dovranno essere $f+a$, $f+a+a_1$, $f+a+a_1+a_2$, ec.; 2.° che perciò il di lei termine $n+1$ equivarrà visibilmente alla cercata somma di n termini della proposta B aumentata di f; 3.° che per avere il termine $n+1$ della serie A basta sostituire f, a, d_1, d_2, ec. in luogo di a, d_1, d_2, d_3, ec. nel termine Generale (*ivi*) della proposta B. Fatte dunque queste sostituzioni, e tolto f avremo per la somma cercata $S=an+\frac{n(n-1)}{2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}d_2+$ec. precisamente come già trovammo per altra via.

*284. Abbiamo un'applicazione della formula precedente nella ricerca del numero delle palle da cannone che compongono un mucchio. Questi mucchj, come tutti sanno, alcune volte sono formati a guisa di piramidi aventi per

basi un triangolo equilatero, oppure un quadrato; altre volte la loro forma si assomiglia a quella di un argine, e allora hanno per base un rettangolo.

Nei mucchj a base triangolare, sotto la prima palla, che costituisce il vertice della piramide, vi è uno strato che contiene 3 palle, a questo ne succede un altro che ne contiene 6, quindi uno che ne contiene 10, e così di seguito. È chiaro perciò che per avere il numero N delle palle contenute in un mucchio di questa specie, convien sommare n termini della serie 1, 3, 6, 10, ec. rappresentando con n il numero degli strati e contando tra questi la palla che è al vertice. Ma la serie 1, 3, 6, 10, ec. è quella dei triangolari ed ha, come sappiamo (282), per termine sommatorio $\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$; dunque avremo $N=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$.

Nei mucchj a base quadrata lo strato sottoposto alla palla che forma il vertice contiene 4 palle, 9 ne sono nello strato che a quello succede, 16 nel seguente; 25, 36, ec. in quelli che successivamente s'incontrano scendendo verso la base. Dunque per i mucchj di questa specie bisogna sommare n termini della serie 1, 4, 9, 16, ec. cioè della serie dei quadrati che ha il primo termine eguale a 1, la prima delle prime differenze eguale a 3, la prima delle seconde eguale a 2, e la prima delle terze, quarte, ec. eguale a zero. Sicchè nella formula generale del termine Sommatorio dovrà porsi $a=1, d_1=3, d_2=2$; il che darà $N=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}$.

Nei mucchj a base rettangolare indicando con a il numero delle palle contenute nel primo strato, o per dir meglio nella linea che costituisce la sommità del mucchio, s'intenderà facilmente che ne debbono essere due volte $a+1$ ossia $2a+2$ nel secondo strato, tre volte $a+2$ ossia $3a+6$ nel terzo, quattro volte $a+3$ ossia $4a+12$ nel quarto, $5a+20$ nel quinto, ec. e che in conseguenza N equivarrà alla somma di n termini della serie a, $2a+2$, $3a+6$, $4a+12$, $5a+20$, ec. Cercando le differenze di questa serie, si trova che essa è del second' ordine come le due precedenti, e che ha $d_1=a+2$, $d_2=2$, $d_3=0=d_4$, ec., e quindi si ha $N=\frac{n(n+1)(3a+2n-2)}{2.3}$.

*285. Passando ad applicazioni di maggiore importanza, proponiamoci di trovare in quanti modi possono combinarsi due a due, tre a tre, quattro a quattro e in generale n ad n le quantità a, b, c, d, e, f, g, ec. che supporremo essere in numero di m.

Per avere le combinazioni binarie ossia di due a due, è evidente che basterà combinare ognuna delle date quantità con ognuna di quelle che la precedono, cioè b con a; c con b e con a; d con c, con b e con a; e con d, con c, con b e con a; e così di seguito. Ma operando così la seconda quantità dà *una* combinazione binaria, la terza ne dà *due*, la quarta *tre*, la quinta *quattro* e in generale l'm^{sima} ne dà $m-1$. Dunque le combinazioni binarie di m quantità saranno in tutte $1+2+3+4+$ ec. $+m-1$, vale a dire equi-

varranno alla somma di $m-1$ termini della serie dei numeri naturali; e perciò, se ne indichiamo con $mC2$ il numero totale, avremo $mC2=\frac{m(m-1)}{2}$.

Ottenute così le combinazioni binarie, sarà facilissimo il trovare quelle *ternarie* ossia di tre a tre. Infatti ne risulterà visibilmente *una* unendo c alla combinazione binaria delle due quantità a e b; ne risulteranno *tre*, unendo d ad ognuna delle tre combinazioni binarie che si formano con le quantità a, b, c; ne risulteranno *sei*, ponendo e in ognuna delle sei combinazioni binarie che si formano con le quattro quantità a, b, c, d: e in generale ne risulteranno $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, unendo l'm^{sima} quantità ad ognuna delle combinazioni binarie che si formano con $m-1$ quantità e che sono appunto $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, come si ha dalla formula precedente. Dunque il numero richiesto che rappresenteremo con $mC3$, è la somma di $m-2$ termini della serie 1, 3, 6, 10, ec. cioè dei numeri triangolari, e quindi si avrà $mC3=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$.

Cercando nello stesso modo le combinazioni a quattro a quattro, le prime quattro quantità ne daranno *una*: la quinta quantità posta in ognuna delle quattro combinazioni ternarie provenienti dalle prime quattro quantità ne darà *quattro*; *dieci* ne darà in simil guisa la sesta; *venti* la settima, e in generale l'm^{sima} ne darà $\frac{(m-2)(m-3)}{2}$, vale a dire tante quante sono le combinazioni ternarie che possono formarsi con $m-1$ quantità. Sicchè il numero totale $mC4$ di m quantità combinate a quattro a quattro sarà la somma di $m-3$ termini della serie 1, 4, 10, 20, 35, ec. Avendosi dunque in questa serie $a=1$, $d_1=3$, $d_2=3$, $d_3=1$, $d_4=0$, ed essendo $n=m-3$, la formula generale $S=an+\frac{n(n-1)}{2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}d_2+$ec.(282) darà $mC4=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}$.

Proseguendo a ragionare in questa maniera, si troverebbe il numero delle combinazioni di m quantità a cinque a cinque $mC5=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}$, e quindi può stabilirsi che in generale il numero delle combinazioni di m quantità prese ad n ad n è $mCn=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots.(m-n+1)}{2.3.4\ldots.n}$.

*286. Per applicare queste formule a qualche esempio, si cerchi il numero degli *ambi*, dei *terni*, delle *quaderne* e delle *quintine* che possono farsi con 90 numeri. Posto $m=90$, avremo per gli ambi $90C2=\frac{90\times89}{2}=4005$; per i terni $90C3=\frac{90.89.88}{2.3}=117480$, per le quaderne $90C4=\frac{90.89.88.87}{2.3.4}=2555190$, per le quintine $90C5=\frac{90.89.88.87.86}{2.3.4.5}=43949268$.

*287. Dalla formula che dà il numero delle combinazioni, potrebbe agevolmente dedursi quello delle *permutazioni*, cioè dei differenti modi in cui possono

disporsi m lettere prendendole due a due, tre a tre, quattro a quattro ec. Infatti, osservando che ogni combinazione binaria come ab dà luogo alla permutazione ba, se ne inferisce che le permutazioni binarie sono il doppio delle combinazioni binarie, e che in conseguenza si ha $mP2=\frac{m(m-1)}{2}\times 2=m(m-1)$. Del pari, se si rifletta che ad ogni combinazione ternaria come abc corrispondono tante permutazioni ternarie quante sono quelle che risultano dal porre a in principio, in mezzo e in fine delle due permutazioni binarie bc, cb cioè *sei*, avremo che il numero delle permutazioni ternarie eguaglia quello delle combinazioni ternarie moltiplicato per sei, e che in conseguenza $mP3=m(m-1)(m-2)$. Ragionando nello stesso modo troveremmo $mP4=m(m-1)(m-2)(m-3)$, cioè che le permutazioni quaternarie sono 24 volte le combinazioni di un egual numero m di quantità prese a quattro a quattro; imperciocchè ogni combinazione come $abcd$ dà tante permutazioni quaternarie, quante son quelle che posson formarsi ponendo innanzi ad ognuna delle sei permutazioni ternarie provenienti da b, c, d la lettera a e poi passandola successivamente nel secondo, nel terzo e nel quarto posto, il che dà visibilmente 24 permutazioni quaternarie. Sicchè potrebbe in generale concludersi $mPn=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$. Ma ecco come questa formula può stabilirsi indipendentemente da quella delle combinazioni.

*288. Tra tutte le mPn permutazioni che posson formarsi con m quantità prese ad n ad n, ve ne saranno certamente $(m-1)P(n-1)$ con l'iniziale a; perchè tante appunto son quelle che posson formarsi con le rimanenti $m-1$ lettere prese ad $n-1$ ad $n-1$. Altrettante ve ne saranno con l'iniziale b, altrettante con l'iniziale c, ec., dimodochè le lettere essendo m in tutte, il numero totale delle permutazioni rappresentate con mPn sarà espresso da $m\times\big((m-1)P(n-1)\big)$. Sarà dunque del pari $(m-1)P(n-1)=(m-1)\big((m-2)P(n-2)\big)$, come pure $(m-2)P(n-2)=(m-2)\big((m-3)P(n-3)\big)$, ec. e infine $(m-n+1)P1=m-n+1$, essendo manifesto quanto all'ultima equazione che $m-n+1$ lettere prese a una a una non dan luogo che ad $m-n+1$ disposizioni. Or se si sostituiscano gli uni negli altri questi valori, oppure se si moltiplichino insieme membro per membro tutte queste equazioni, e quindi si tolgano i fattori comuni, troveremo $mPn=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ precisamente come sopra.

Si osserverà che nell'ipotesi di $m=n$ risulta $nPn=n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$, ed invertendo, $nPn=1.2.3.4\ldots n$.

*289. Confrontando adesso i valori di mCn, mPn, nPn, se ne dedurrà immediatamente la relazione $mCn=\frac{mPn}{nPn}$, la quale sta a dirci che per avere il numero delle combinazioni di m lettere o quantità basta dividere il numero delle permutazioni di m lettere o quantità prese n ad n per il numero delle permutazioni di n lettere o quantità prese egualmente n ad n. Ciò può anche

provarsi nel modo seguente. Supponiamo di aver formate tutte le mCn combinazioni. Ognuna di queste contenendo n lettere darà evidentemente luogo ad nPn permutazioni, e in conseguenza tutte le mCn combinazioni ne daranno $nPn\times mCn$. Dunque sarà $mPn=nPn\times mCn$ e perciò $mCn=\frac{mPn}{nPn}$.

*290. Le formule che abbiamo stabilite per i valori di mPn e di mCn suppongono che ogni permutazione egualmente che ogni combinazione sia composta di lettere tutte tra loro diverse. Proponiamoci di trovare le permutazioni e le combinazioni con *replica*, quelle cioè in cui entra ripetutamente e in tutti i modi possibili una medesima lettera. Cominciando dalla ricerca del numero delle permutazioni con replica che rappresenteremo con $mPRn$, disponiamo come di contro le m lettere date, in altrettante linee orizzontali; scriviamo a innanzi a ciascuna lettera della prima linea, b innanzi ad ognuna di quelle della seconda linea, e a quelle della terza, d a quelle della quarta, e così di seguito. In tal modo otterremo manifestamente da ciascheduna linea m differenti permutazioni binarie, cioè m con l'iniziale a dalla prima linea, m con l'iniziale b dalla seconda, m con l'iniziale e dalla terza, ec.; in tutto ne avremo dunque tante volte m quante sono le linee, e in conseguenza $m\times m$ ossia m^2, giacchè m sono le linee. Supponendo ora che tutte queste permutazioni binarie siano scritte in m linee orizzontali, se si pone a in principio di ciascun termine della prima linea, b in principio a ciascun termine della seconda, c a quelli della terza, d a quelli della quarta, ec. risulteranno m linee contenenti ciascheduna m^2 permutazioni ternarie, le quali per conseguenza saranno m^3 in tutte. Scritte anche queste in m linee orizzontali e posta l'iniziale a ai termini della prima linea, l'iniziale b a quelli della seconda, ec., risulteranno m^4 permutazioni di quattro a quattro; le quali ne daranno m^5 di cinque a cinque, m^6 di sei a sei, e in generale m^n di n ad n. Sarà dunque $mPRn=m^n$.

a	b	c	d	e	f ec.
a	b	c	d	e	f ec.
a	b	c	d	e	f ec.
a	b	c	d	e	f ec.
	ec.	ec.	ec.	ec.	

Procediamo alla ricerca del numero delle combinazioni con replica che rappresenteremo con $mCRn$. La prima lettera a combinata con sè stessa, dà una combinazione binaria aa; la lettera b combinata con sè stessa e con a, dà 2 combinazioni binarie; la lettera e combinata con sè stessa con b e con a, ne dà 3; la lettera d, ne dà 4; e ne dà 5; ec. e in generale la lettera m^{sima} ne dà m. Dunque il numero totale delle combinazioni binarie con replica, è dato dalla somma di m termini della serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, ec., e in conseguenza è $\frac{m(m+1)}{2}$(282). La prima lettera a combinata tre volte con sè stessa, dà la combinazione ternaria aaa; b dà luogo a 3 combinazioni ternarie, a tante cioè quante se ne ottengono ponendo l'iniziale b in ognuna delle tre combinazioni binarie con replica che posson formarsi con le due lettere a, b; c ne dà 6, cioè quante se ne hanno ponendo l'iniziale e in ognuna delle sei combinazioni binarie con replica provenienti dalle tre lettere a, b, e; in pari modo d ne

dà 10; e ne dà 15; ec. Dunque le combinazioni di questa specie equivalgono alla somma di m termini della serie 1, 3, 6, 10, 15, ec. e perciò son date da $\frac{m(m+1)(m+2)}{2.3}$ (*ivi*). Seguitando in questa maniera si troverà che le combinazioni a quattro a quattro con replica sono $\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3.4}$, e quindi può stabilirsi che in generale sarà $mCRn=\frac{m(m+1)(m+2)....(m+n-1)}{2.3....m}$.

Si osserverà che la formula delle combinazioni con replica è quella stessa delle combinazioni semplici (285), cambiatovi m in $m+n$. E ciò perchè, mentre per le combinazioni con replica di 2 a 2, di 3 a 3, di 4 a 4, ec. si sommano sempre m termini delle serie 1, 2, 3, 4, ec.; 1, 3, 6, 10, ec.; 1, 4, 10, 20, ec. ec.; per le combinazioni semplici bisogna sommarne $m-1$ della prima, $m-2$ della seconda, $m-3$ della terza, e così di seguito (*ivi*).

*291. Vedremo in seguito quali utili applicazioni possono farsi di queste formule: ma intanto, ripresa la formula delle combinazioni semplici (285), osserveremo che i termini della frazione apparente $\frac{m(m-1)(m-2)....(m-n+1)}{1.2.3....n}$, da cui si ha il valore di mCn, essendo composti di un egual numero n di fattori, i quali costantemente scemano nel numeratore e crescono nel denominatore di un'unità, fatto $m=p+q$, risulta $mCp=mCq$. Avendosi infatti $mCp=\frac{m(m-1)(m-2)....(m-p+1)}{1.2.3....p}$, $mCq=\frac{m(m-1)(m-2)....(m-q+1)}{1.2.3....q}$, se si supponga $p>q$ e si divida la prima di queste equazioni per la seconda, avvertendo che i secondi membri hanno comuni i primi q fattori, risulterà $\frac{mCp}{mCq}=\frac{(m-q)(m-q-1)....(m-p+1)}{(q+1)(q+2)....p}$, ossia, invertendo i fattori del numeratore, $\frac{mCp}{mCq}=\frac{(m-p+1)(m-p+2)....(m-q)}{(q+1)(q+2)....p}$. Ma siccome per ipotesi abbiamo $p+q=m$, e in conseguenza $m-p=q$, $p=m-q$, la sostituzione di questi valori darà $\frac{mCp}{mCq}=\frac{(q+1)(q+2)....(m-q)}{(q+1)(q+2)....(m-q)}=1$, e in conseguenza sarà $mCp=mCq$. Ciò dimostra che m lettere danno lo stesso numero di combinazioni, sia che si prendano p a p, sia che si prendano q a q, purchè sia $m=p+q$. Sicchè se si avesse $m=9$, sarebbe $9C1=9C8$; $9C2=9C7$; $9C3=9C6$; $9C4=9C5$. Segue anche di qui che combinando successivamente 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, ec. m lettere, dalla metà in giù si riproducono i medesimi termini. Così nell'ipotesi di $m=9$, troveremo 9, 36, 84, 121, 121, 84, 36, 9.

Serie algebriche. Metodo dei coefficienti indeterminati. Binomio di Newton. Ritorno delle serie.

*292. Intendiamo per *Serie algebrica* un seguito finito o infinito di termini ordinati per una medesima lettera esprimente una quantità *variabile*, cioè di un valore che non è vincolato da veruna condizione e che quindi può

cangiarsi a piacere. La variabile si rappresenta con una delle ultime lettere dell'alfabeto, mentre le altre quantità che possono trovarsi nei termini della serie e che avendo un valore determinato e fisso, s'appellan *costanti*, si indicano con le prime. Una serie algebrica è *ascendente* se gli esponenti della variabile, a contare dal primo termine, vanno successivamente crescendo.

Generalmente parlando, le serie algebriche non sono altro che la trasformazione o il risultato di una quantità, sottoposta a certe date operazioni, come sarebbero la divisione, l'estrazione della radice, ec. La quantità da cui deriva una data serie, o che, come suol dirsi più comunemente, *svolgesi in serie*, si chiama *la funzione derivatrice*. Così l'espressione $1+x+x^2+x^3+$ ec. procedente all'infinito, che si ottiene dividendo 1 per $1-x$, e nella quale può attribuirsi ad x qualunque valore, purchè con x positiva abbiasi pure $x<1$, è una serie algebrica ascendente, ed $\frac{1}{1-x}$ ne è la funzione derivatrice.

*293. La teoria delle serie algebriche è di somma importanza; perciocchè le serie di questa specie non solo valgono a far meglio conoscere la natura di certe date quantità, ma di più somministrano dei mezzi non meno efficaci che pronti per trovare con tutta l'approssimazione che si desidera i valori delle quantità irrazionali, anche quando ciò sarebbe impossibile o troppo difficile a conseguirsi per altre vie. Qui però delle molte ricerche che comprende questa teoria, non possiamo occuparci che di quella soltanto, la quale ha per oggetto di trovare la serie in cui si svolge una data funzione, ricerca che per altra parte è la prima e la più importante di tutte.

*294. Sia $\varphi(x)$ la funzione da svolgersi in una serie che proceda secondo le potenze ascendenti della variabile x. Prestabilita così in massima la forma che si vuol dare allo sviluppo di $\varphi(x)$, tutto si ridurrà a trovare da quali coefficienti verranno affette nella serie cercata le successive potenze di x; dimodochè posta l'equazione $\varphi(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ec. che appelleremo l'equazione (I), i coefficienti A, B, C, D, ec. saranno le incognite del nostro problema, i dati del quale sono 1.° la condizione che l'equazione (I) debba sussistere per qualunque valore di x: giacchè il secondo membro di essa non è che una trasformazione del primo: 2.° la proprietà inerente ai coefficienti A, B, C, D, ec. di esser costanti, vale a dire di non variare insieme con x, attesochè essi dipendono unicamente dalla natura della data funzione e dalle quantità invariabili che in questa posson trovarsi; il perchè se riesca trovarne il valore in circostanze particolari del valore della x, tale verrà da essi conservato in ogni altro caso, in grazia della loro indipendenza dal valore della variabile, e il problema sarà quindi sciolto completamente.

*295. Or supponiamo che, profittando opportunamente di questi dati, si giunga a trasformare l'equazione (I) nell'altra $0=A_1+B_1x+C_1x^2+D_1x^3+$ec., che indicheremo con (II), e nella quale le costanti A_1, B_1, C_1, D_1, ec. non siano altro che quelle dell'equazione precedente combinate in un modo qualunque con altre quantità parimente costanti e, di più, note. Allora se pongasi mente che anche la nuova equazione deve sussistere per ogni valore di x, si renderà

manifesto che ognuno dei suoi coefficienti è necessariamente eguale a zero. Da essa infatti traendosi $-A_1=x(B_1+C_1x+D_1x^2+\text{ec.})$, abbiamo che il prodotto $x(B_1+C_1x+\text{ec.})$ malgrado la variabilità di x deve costantemente eguagliare $-A_1$. Ma perchè ciò possa accadere, è necessario che uno dei suoi fattori e precisamente il secondo sia sempre zero, perchè nel caso contrario ambedue i fattori varierebbero insieme con x e quindi il loro prodotto non potrebbe esser costante, a meno che non volesse supporsi che la diminuzione di uno dei fattori restasse compensata dall' aumento dell' altro, il che qui non sarebbe punto a proposito; imperocchè la possibilità di tale compensazione esigerebbe che le variazioni di ambedue insieme i fattori o di niuno di essi avessero un limite, dimodochè se l' uno può crescere indefinitamente, l' altro possa indefinitamente scemare, oppure se la diminuzione di uno è limitata, lo sia ancora l'aumento dell' altro. Ora ciò non ha luogo nel caso nostro, essendo evidente che mentre si può scemare e si scema di fatto indefinitamente il valore di x, l' altro fattore $B_1+C_1x+D_1x^2+$ ec. tende a diventare B_1, e così incontra un limite che non può oltrepassare. Dunque affinchè il prodotto $x(B_1+C_1x+D_1x^2+\text{ec.})$ sia costante, deve aversi (III) $B_1+C_1x+D_1x^2+\text{ec.}=0$, e in conseguenza anche $A_1=0$. Ripetendo lo stesso ragionamento sull' equazione (III), che è nelle stesse condizioni della (II), avremo del pari (IV) $C_1+D_1x+E_1x^2+\text{ec.}=0$, e di qui $B_1=0$. Continuando poi in questo modo troveremo $C_1=0$, $D_1=0$, $E_1=0$, ec., e così resterà provato che ognuno dei coefficienti dell'equazione $0=A_1+B_1x+C_1x^2+D_1x^3+\text{ec.}$ non può essere altro che zero. Ma per ipotesi questi coefficienti contengono quelli dell' equazione (I), cioè le incognite del nostro problema combinate con quantità tutte note; dunque se si risolvano le equazioni $A_1=0$, $B_1=0$, $C_1=0$, ec. che appunto son tante di numero quante sono le incognite, avremo quei valori di A, B, C, ec. che posti nell'equazione $\varphi(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}$ danno la serie cercata.

Dunque per trovare la serie ascendente in cui si svolge una data funzione $\varphi(x)$, dopo aver posto $\varphi(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}$, fa d' uopo: 1.° trasformare quest' equazione nell' altra $0=A_1+B_1x+C_1x^2+D_1x^3+\text{ec.}$ nella quale i coefficienti costanti delle successive potenze di x per cui è ordinata allo stesso modo della precedente, contengano le quantità A, B, C, D, ec. combinate con altre quantità costanti e note; variando a quest' effetto il valore di x in maniera da mettere in conto qualche proprietà caratteristica della funzione proposta, e così far valere i dati del problema: 2.° eguagliare a zero ognuno dei coefficienti della trasformata; 3.° risolvere rispetto ad A, B, C, D, ec. le equazioni particolari che ne risultano, e sostituire nell' equazione primitiva i valori così ottenuti.

Questa regola, celebre per la sua feconda semplicità è quella che porta il nome di *metodo dei coefficienti indeterminati*. Passiamo a farne qualche applicazione.

*296. Abbiasi in primo luogo $\varphi(x)=\frac{a}{b+cx}$. Fatto $\frac{a}{b+cx}=A+Bx+Cx^2+\ldots$

Dx^3+Ex^4+ec., è ben manifesto che per ottenere la trasformata, basterà moltiplicare ambedue i membri dell'equazione per $b+cx$ e poi trasportare a nel secondo membro. Eseguita questa operazione, abbiamo

$$0=\begin{cases} bA+bBx+bCx^2+bDx^3+bEx^4+\text{ec.} \\ -a+cAx+cBx^2+cCx^3+cDx^4+\text{ec.}\end{cases}$$

Eguagliando ora a zero i coefficienti, oppure le colonne dei coefficienti di ciascuna potenza di x, giacchè può tornar comodo di disporre in colonna i termini simili, come vedesi nel nostro esempio, troviamo 1.ª $bA-a=0$, 2.ª $bB+cA=0$, 3.ª $bC+cB=0$, 4.ª $bD+cC=0$, ec.; e siccome dalla prima si trae $A=\frac{a}{b}$, dalla 2.ª $B=\frac{-cA}{b}=\frac{-ac}{b^2}$, dalla 3.ª $C=\frac{-cB}{b}=\frac{ac^2}{b^3}$, dalla 4.ª $B=-\frac{ac^3}{b^4}$, ec. la serie cercata sarà $\frac{a}{b}-\frac{acx}{b^2}+\frac{ac^2x^2}{b^3}-\frac{ac^3x^3}{b^4}+$ec., precisamente come si sarebbe ottenuto mediante la divisione di a per $b+cx$.

*297. Sia in secondo luogo $\varphi(x)=\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}$. Porrò $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$ec., e operando come nel precedente esempio avrò

$$0=\begin{cases} Aa^2+Ba^2x+Ca^2x^2+Da^2x^3+Ea^2x^4+\text{ec.} \\ -a^2+2Aax+2Bax^2+2Cax^3+2Dax^4+\text{ec.} \\ \qquad\quad -\ Ax^2-\ Bx^3-\ Cx^4-\text{ec.}\end{cases}$$

e quindi l'equaz.[i] $A-1=0$, $Ba+2A=0$, $Ca^2+2Ba-A=0$, $Da^2+2Ca-B=0$, $Ea^2+2Da-C=0$, ec., donde i valori $A=1$, $B=-\frac{2}{a}$, $C=\frac{5}{a^2}$, $D=-\frac{12}{a^3}$, $E=\frac{29}{a^4}$, ec e perciò $\frac{a^2}{a^2+2ax-x^2}=1-\frac{2x}{a}+\frac{5x^2}{a^2}-\frac{12x^3}{a^3}+\frac{29x^4}{a^4}-$ec.

298. Le due serie che abbiamo ottenute, e generalmente tutte quelle che nascono dalle frazioni razionali si chiamano *ricorrenti*; perchè determinati i primi coefficienti, gli altri si hanno con un calcolo uniformemente ripetuto e *ricorrendo* a quelli dai quali son preceduti. Così nel secondo esempio i due primi A, B si determinano coll'equazione $a^2A-a^2=0$, $a^2B+2aA=0$: riguardo agli altri C, D, E, ec. si ha $C=\frac{-2B}{a}+\frac{A}{a^2}$, $D=\frac{-2C}{a}+\frac{B}{a^2}$, $E=\frac{-2D}{a}+\frac{C}{a^2}$, ec.

Ora le quantità costanti $\frac{-2}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, dal cui prodotto nei respettivi coefficienti B, A, ovvero C, B, ovvero D, C, ec. che precedono nasce ciascun coefficiente C, D, E; ec., si chiamano *scala di relazione:* ed è facile osservare 1.° che la scala di relazione è formata dai coefficienti che ha x nel denominatore ordinato del rotto proposto o *genitore*, presi con segni contrarj e divisi per il termine costante o con x a zero: 2.° che per avere il coefficiente di un nuovo termine della serie bisogna moltiplicar l'ultimo già trovato per il primo termine della scala di relazione, il penultimo per il secondo, ec. e far la somma di tutto. Così il rotto $\frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}$, nel cui denominatore mancano z^2, z^3, dà per la scala di relazione $1, +0, +0, +1, -1$: e poichè il metodo dà per i primi coef-

que coefficienti 1, 2, 3, 3, 4, il sesto sarà $1\times4+0\times3+0\times3+1\times2-1\times1=5$, il settimo $1\times5+0\times4+0\times3+1\times3-1\times2=6$, ec., d' onde la serie $1+2z+3z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6+$ec.

299. Debba ora svolgersi in serie il radicale $\sqrt{(a^2-x^2)}$. Porremo $\sqrt{(a^2-x^2)}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+$ec. e quindi quadrando e trasportando si avrà

$$0=\left\{\begin{array}{l} A^2+2ABx+2ACx^2+2ADx^3+2AEx^4+2AFx^5+2AGx^6+\text{ec.} \\ -a^2 \qquad\quad + \quad B^2x^2+2BCx^3+2BDx^4+2BEx^5+2BFx^6+\text{ec.} \\ \qquad\qquad + \quad x^2 \qquad\quad + \quad C^2x^4+2CDx^5+2CEx^6+\text{ec.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \quad D^2x^6+\text{ec.} \end{array}\right.$$

d' onde eguagliata a zero ogni colonna, avremo $A=a$, $B=0$, $C=-\frac{1}{2a}$, $D=0$, $E=-\frac{1}{8a^3}$, $F=0$, $G=-\frac{1}{16a^5}$, ec. e quindi $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-$ec.

*300. Ma debba ridursi in serie l' espressione più generale $(1+x)^m$. Fatto $(1+x)^m=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$ec. per trovare la trasformata (295), ci prevarremo della proprietà inerente alla funzione $(1+x)^m$ di dare il medesimo risultato sia inalzandola a quadrato, sia cangiandovi x in $x(2+x)$. Infatti $\left((1+x)^m\right)^2$ dà, come sappiamo (189), $(1+x)^{2m}$, ed $\left(1+x(2+x)\right)^m$ si riduce ad $(1+2x+x^2)^m$, ed avvertendo che $1+2x+x^2$ è lo stesso che $(1+x)^2$, si ha del pari $\left(1+x(2+x)\right)^m=\left((1+x)^2\right)^m=(1+x)^{2m}$. Se dunque eguagliamo i due valori di $(1+x)^{2m}$, quello cioè che si ottiene elevando a quadrato l'equazione $(1+x)^m=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$ec., e quello che risulta dal sostituire nella medesima $x(2+x)$ in luogo di x; mandata a zero la nuova equazione, avremo

$$0=\left\{\begin{array}{r} A^2+2ABx+2ACx^2+2ADx^3+2AEx^4+\text{ec.} \\ -A-2Bx+B^2x^2+2BCx^3+2BDx^4+\text{ec.} \\ -Bx^2-4Cx^3+C^2x^4+\text{ec.} \\ -4Cx^2-8Dx^3-Cx^4-\text{ec.} \\ -12Dx^4-\text{ec.} \\ -16Ex^4-\text{ec.} \end{array}\right.$$

e la prima colonna darà $A=1$, la 2.ª $B=B$, la 3.ª $C=\frac{B(B-1)}{2}$, la 4.ª $D=\frac{B(B-1)(B-2)}{2.3}$, la 5.ª $E=\frac{B(B-1)(B-2)(B-3)}{2.3.4}$, ec.

Risulta dunque $(1+x)^m=1+Bx+\frac{B(B-1)}{2}x^2+\frac{B(B-1)(B-2)}{2.3}x^3+$ec. con legge ben manifesta. Restando peraltro indeterminato il valore di B e con esso quello puranche degli altri coefficienti che ne dipendono, la serie trovata ci dà bensì la forma generale che seguono le potenze del binomio $1+x$, ma non ci somministra lo sviluppo speciale dello stesso binomio elevato ad una data potenza. Per ottenere questo, è necessario che si faccia valere un altro dato del nostro problema, cioè il grado della potenza dal

quale appunto dipende, come è naturale, il valore particolare dello sviluppo richiesto, e conseguentemente anche il valore di B. Qualunque esser possa la relazione che deve esistere e che trattasi di trovare tra la costante B e l'esponente m, rappresentiamola con l'espressione generale $B=f(m)$, indicando con la lettera f la parola *funzione*. Decomponendo m in due parti p e q in modo che sia $m=p+q$, avremo le prime quattro equazioni poste di contro. Moltiplicando poi tra loro la 2.ª e 3.ª, ne risulterà la 5.ª che, sottratta dalla 4.ª, darà la 6.ª dalla quale si dedurrà nel solito modo $f(p+q)-\left(f(p)+f(q)\right)=0$, ossia $f(p+q)=f(p)+f(q)$.

$$\begin{array}{ll} 1.^a & (1+x)^m=1+f(m)x+\text{ ec.} \\ 2.^a & (1+x)^p=1+f(p)x+\text{ ec.} \\ 3.^a & (1+x)^q=1+f(q)x+\text{ ec.} \\ 4.^a & (1+x)^{p+q}=1+\quad f(p+q)x+\text{ ec.} \\ 5.^a & (1+x)^{p+q}=1+\left(f(p)+f(q)\right)x+\text{ ec.} \\ 6.^a & 0=\begin{cases} 1+\quad f(p+q)x+\text{ ec.} \\ -1-\left(f(p)+f(q)\right)x-\text{ ec.} \end{cases} \end{array}$$

Ragionando e operando nello stesso modo nell'ipotesi di $m=p+q+r$, si troverebbe $f(p+q+r)=f(p)+f(q)+f(r)$. Sicchè in generale, posto $m=p+q+r+s+$ec. Si avrà $f(m)=f(p+q+r+s+\text{ec.})=f(p)+f(q)+f(r)+f(s)+$ec.

Ciò premesso, in primo luogo sia m un numero intero e positivo. Supponendolo decomposto nelle sue unità, il teorema contennto nella formula ora trovata ci darà $f(m)=f(1)+f(1)+f(1)+$ ec. Ma $f(1)$ è eguale ad 1 nel caso nostro, perchè $(1+x)^1=1+1x$: dunque $f(m)=1+1+1+$ ec., e siccome qui i termini sono m, avremo che $f(m)$ e perciò B è eguale ad m.

Supponiamo in secondo luogo che m sia un nnmero intero e negativo. Allora l'equaz. $f(m)=f(p)+f(q)+f(r)+$ec. ci darà $f(-m)=f(-p)+f(-q)+f(-r)+$ec. e, facendo $p=q=r=$ ec. $=1$, sarà $f(-m)=f(-1)+f(-1)+f(-1)+$ ec. Ma qui pure i termini del secondo membro essendo m e avendosi $f(-1)=-1$ perchè $(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}$ dà $1-x+$ ec., come risulta dalla divisione di 1 per $1+x$, dunque in questo caso abbiamo $B=f(-m)=-m$.

Supponiamo infine che m sia una frazione, che rappresenteremo con $\frac{n}{d}$. Ripresa anche per questo caso la relazione $f(m)=f(p)+f(q)+f(r)+$ec., la quale sussiste qualunque sia m e qualunque siano le parti in cui m si decompone sostituiamovi $\frac{n}{d}$ invece di m, ed $\frac{1}{d}$, vale a dire ognuna delle n parti che compongono la frazione $\frac{n}{d}$, invece di p, q, r, ec. Otterremo $f\left(\frac{n}{d}\right)=f\left(\frac{1}{d}\right)+f\left(\frac{1}{d}\right)+f\left(\frac{1}{d}\right)+$ ec. ossia $f\left(\frac{n}{d}\right)=nf\left(\frac{1}{d}\right)$, giacchè i termini del secondo membro sono n. Ma $f\left(\frac{1}{d}\right)$ equivale ad $\frac{1}{d}$, perchè avendosi $f\left(\frac{d}{d}\right)=f\left(\frac{1}{d}\right)+f\left(\frac{1}{d}\right)+f\left(\frac{1}{d}\right)+$ec. $=df\left(\frac{1}{d}\right)$ ed essendo $f\left(\frac{d}{d}\right)=f(1)=1$,

ne risulta $1=df\left(\frac{1}{d}\right)$ e quindi $f\left(\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{d}$. Sarà dunque $f\left(\frac{n}{d}\right)=nf\left(\frac{1}{d}\right)=n\times\frac{1}{d}=\frac{n}{d}$, e perciò anche nel caso attuale il coefficiente B eguaglierà il grado della potenza a cui s'inalza il binomio $1+x$, cioè dovrà aversi $B=m$.

Concludiamo adunque che in ogni caso il valore di B eguagliando sempre quello di m, si avrà in generale

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3+\text{ ec.}$$

ben inteso peraltro che in questa formula il valore intero o frazionario rappresentato da m si sostituisca col suo proprio segno.

*301. Per rendere più generale la formula precedente, abbiasi da elevare alla potenza m il binomio $a+x$. Osservando che $a+x$ equivale ad $a\left(1+\frac{x}{a}\right)$ e ponendo $\frac{x}{a}=z$, avremo $(a+x)^m=\left(a(1+z)\right)^m=(189)\ a^m(1+z)^m$. Basterà dunque moltiplicare per a^m lo sviluppo di $(1+z)^m$ e sostituire a z il suo valore $\frac{x}{a}$. Operando così si troverà

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}x^3+\text{ ec.}$$

Se poi si cangi x in $-x$, avremo

$$(a-x)^m=a^m-ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}x^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}x^3+\text{ ec.}$$

e riunendo ambedue le formule

$$(a\pm x)^m=a^m\pm ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}x^2\pm\frac{m(m-1)m-2)}{2.3}a^{m-3}x^3+\text{ ec.}$$

precisamente come trovammo per altra via (208).

*302. Già noi trasformammo (ivi) la formula del binomio in modo da renderne più facili le applicazioni, e trovammo $(a\pm x)^m=a^m+mAQ+\left(\frac{m-1}{2}\right)\times BQ+\frac{(m-2)}{3}CQ+$ ec. ove A, B, C, ec. rappresentano il primo, il secondo, il terzo, ec. termine dello sviluppo e Q il quoziente $\pm\frac{x}{a}$. Volendo ora adattarla al caso che m sia una frazione $\frac{p}{q}$, avremo, sostituendo $\frac{p}{q}$ in luogo di m ed eseguendo le opportune riduzioni,

$$(a\pm x)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a\pm x)^p}=a^{\frac{p}{q}}+\frac{p}{q}AQ+\left(\frac{p-q}{2q}\right)BQ+\left(\frac{p-2q}{3q}\right)CQ+\text{ ec.}$$

formula interminabile; perchè essendo $\frac{p}{q}$ una vera frazione, niuna delle quantità $p-q$, $p-2q$, $p-3q$, ec. può mai essere zero. Applichiamola a qualche esempio.

Vogliasi il valore di $\sqrt{\left(\frac{1}{a^2\pm x^2}\right)}=(173.\ 2^o)\ (a^2\pm x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Sarà $p=-1$,

$q=2$, $Q=\pm\frac{x^2}{a^2}$, ed a sarà cangiata in a^2; con che avremo

$$\sqrt{\left(\frac{1}{a^2\pm x^2}\right)}=\frac{1}{a}\mp\frac{x^2}{2a^3}+\frac{3x^4}{8a^5}\mp\frac{5x^6}{16a^7}+\frac{35x^8}{128a^9}\mp\text{ec.}$$

Vogliasi il valore di $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{1\pm x^2}\right)}=(1\pm x^2)^{-\frac{1}{3}}$. Sarà $p=-1$, $q=3$, $Q=\pm x^2$ ed $a=1$: troveremo

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{1\pm x^2}\right)}=1\mp\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{9}\mp\frac{14x^6}{81}+\frac{35x^8}{243}\mp\frac{91x^{10}}{729}+\text{ec.}$$

303. La formula può applicarsi all'estrazione approssimata di qualunque radice n^{sima} di un dato numero N che non sia potenza del grado corrispondente. A tale effetto si rappresenti con p^n la potenza n^{sima} inferiormente o superiormente più prossima ad N, e si ponga $N-p^n=\pm d$ avendo luogo il segno di sopra quando si ha $N>p^n$. Fatto $a=p^n$, $x=\pm d$ ed $m=1$, sarà $Q=\frac{\pm d}{p^n}$, e $\sqrt[n]{N}=p+\frac{1}{n}AQ-\frac{n-1}{2n}BQ-\frac{2n-1}{3n}CQ-$ec. Così volendo $\sqrt[3]{6}$ ho $n=3$, $p^n=8$; $p=2$, $d=-2$, $Q=-\frac{1}{4}$, e $\sqrt[3]{6}=2-\frac{1}{6}-\frac{1}{72}-\frac{5}{2592}$ ec. Questo metodo, benchè sempre pronto e sicuro, è peraltro laboriosissimo, ed ha in oltre il difetto di esigere che si conosca la potenza p^n; laonde non potrebbe applicarsi con qualche facilità che nel caso di numeri molto bassi, per i quali assai meglio servono i logaritmi.

304. Vogliasi infine sviluppare il prodotto $P=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ec., i cui fattori sono infiniti di numero, e gli esponenti dell'x procedono nella progressione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, ec. Pongo $P=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ec., e chiamo P_1 ciò che diviene P se vi si cangi x in x^2. Avremo le due equazioni $1.^a\ P_1=(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\text{ec.}=\frac{P}{1+x}$; $2.^a\ P_1=1+Ax^2+Bx^4+Cx^6+Dx^8+$ec., che moltiplicate per $1+x$ danno $3.^a\ P_1(1+x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\text{ec.}=P=1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{ec.}$; $4.^a\ P_1(1+x)=(1+x)(1+Ax^2+Bx^4+Cx^6+\text{ec.})$, eguagliati i due valori di $P_1(1+x)$, effettuata la moltiplicazione del secondo, ed operando sul resto al solito, troveremo $P=1+x+x^2+x^3+x^4+$ec.

305. La forma $A+Bx+Cx^2+$ec. che abbiamo data alle serie precedenti può talvolta non convenire allo sviluppo di una data funzione. Ciò si riconoscerà dai risultamenti o insignificanti o anche assurdi a cui saremo condotti dal calcolo. Così se si avesse $\varphi(x)=\sqrt{(x-x^2)}$ e si ponesse $\sqrt{(x-x^2)}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ec., si troverebbe $A=0$, $B=0$, $C=0$, ec.; ed è infatti visibile che essendo $\sqrt{(x-x^2)}=\sqrt{x}\sqrt{(1-x)}$, tutti i termini della serie dovranno contenere il fattore $\sqrt{x}$, onde non avranno luogo potenze intere, e quindi i coefficienti di queste potenze dovranno tutti esser nulli. Si toglie qui l'inconveniente riducendo in serie $\sqrt{(1-x)}$, e tutto moltiplicando in seguito per $\sqrt{x}$. In pari assurdo si caderebbe ponendo eguale ad $A+Bx+$ec. la frazione $\frac{1}{x-1}$,

e si eviterebbe svolgendo in serie il rotto $\frac{1}{1-x}$ e cambiando in ultimo il segno ad ogni termine.

306. Risulta di qui che il metodo non deve applicarsi senza molta cautela. Gioverà bene spesso l'aver conosciuto per qualche mezzo preventivo l'indole dell'andamento di cui è suscettiva la serie richiesta, ed esser sicuri che quest'andamento sarà costante; il che non sempre succede. Sarà anche ben fatto esaminare se nei casi particolari, in cui la funzione data acquista un valor noto, la serie supposta vi corrisponda esattamente. Avremo frequentemente luogo nel seguito di assuefarci all'uso di queste cautele.

307. Intanto, riguardo alle funzioni algebriche di cui qui si tratta, daremo queste avvertenze generali: 1.ª se una qualunque potenza x^n della quantità x, per cui vuole ordinarsi la serie, moltiplica o divide la funzione tutta intera, dovrà togliersi dalla funzione, applicare il metodo alla parte che resta, e quindi a operazione finita moltiplicare o dividere ciascun termine della serie per la potenza soppressa. 2.ª Se la funzione data non contiene che potenze pari di x, potremo impostar la serie con le sole potenze pari: ponendovi anche le impari il calcolo ne farebbe trovar nulli tutti i coefficienti come è accaduto di sopra. 3.ª Il primo termine di uno sviluppo qualunque corrisponde sempre al valore che prende la funzione quando vi si fa $x=0$. Questa riflessione contribuisce moltissimo a semplicizzare i calcoli.

308. Abbiasi adesso $x=ay+by^2+cy^3+dy^4+$ec. e vogliasi il valor di y dato per x. Il metodo che insegna a trovarlo si chiama *metodo inverso* o *ritorno delle serie*, che presso a poco è il seguente. Pongo $y=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ec. e quindi ho

$$\begin{aligned}
ay &= aAx + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 + aEx^5 + \text{ec.}\\
by^2 &= \begin{cases} bA^2x^2 + 2bABx^3 + 2bACx^4 + 2bADx^5 + \text{ec.}\\ \qquad + bB^2x^4 + 2bBCx^5 + \text{ec.}\end{cases}\\
cy^3 &= \begin{cases} cA^3x^3 + 3cA^2Bx^4 + 3cA^2Cx^5 + \text{ec.}\\ \qquad + 3cAB^2x^5 + \text{ec.}\end{cases}\\
dy^4 &= dA^4x^4 + 4dA^3Bx^5 + \text{ec.}\\
ey^5 &= + eA^5x^5 + \text{ec.}
\end{aligned}$$

Sommate quest'equazioni, trasportato il primo membro della somma, che in forza della proposta è eguale ad x, e determinati al solito e sostituiti nel valor supposto di y i valori di A, B, C, ec. troveremo $y=\frac{x}{a}-\frac{bx^2}{a^3}+\frac{2b^2-ac}{a^5}x^3+\frac{5abc-a^2d-5b^3}{a^7}x^4+\frac{14b^4-21ab^2c+6a^2bd+3a^2c^2-a^3e}{a^9}x^5+$ec. Così se $x=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+$ec. si avrà $y=x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+$ec.; e se $x=y-y^2+y^3-y^4+$ec., si troverà $y=x+x^2+x^3+x^4+$ec. Che se fosse $x=a+by+cy^2+dy^3+$ec., si farà $x-a=z$, e si avrà y dato per le potenze di z. Si avverta però che il dato metodo generale non è sempre applicabile, e spesso fa d'uopo aver prima conosciuta l'indole della serie inversa.

Logaritmi.

309. Se a, m, b sieno tre numeri tali che abbiasi $a^m=b$, m prende in tal caso il nome di *logaritmo* di b, il che si esprime scrivendo $m=lb$; b prende quello di *numero corrispondente* del logaritmo m, il che si esprime scrivendo $lb=m$; e finalmente la radice a della potenza a^m si chiama *base* del logaritmo.

310. Se la base è costante, è chiaro che ciascun numero avrà un differente logaritmo, come ciascun logaritmo avrà un diverso numero corrispondente. Se poi la base varia, potrà uno stesso numero aver differenti logaritmi, e ad uno stesso logaritmo potranno corrispondere numeri differenti, essendo chiaro che può aversi nel tempo stesso $b=a^m=c^p=d^q=$ ec, come pure $a^m=b$, $g^m=h$, $r^m=k$, ec.

311. Qualunque siasi la base, ben si vede 1.° che l'unità ha sempre zero per logaritmo; 2.° che la base ha per logaritmo l'unità: infatti $a^0=1$ (164. 5.°), $a^1=a$: 3.° che $a^{lb}=b$; 4.° che supposta $a>1$ i logaritmi dei numeri interi e dei rotti improprj son positivi: ma quelli dei rotti proprj son negativi. Infatti da $a^m=b$ avendosi $\frac{1}{a^m}=$ (164) $a^{-m}=\frac{1}{b}$ sarà $l\frac{1}{b}=-m$; 5.° che crescendo b cresce m: onde a numeri maggiori corrispondono logaritmi maggiori, e viceversa; quindi se b è infinito sarà infinito anche il suo logaritmo; 6.° che supposta a positiva lo saranno pure a^m e b, onde in quest' ipotesi *i logaritmi dei numeri negativi sono immaginarj.*

312. Il più comodo fra tutti i sistemi è quello in cui $a=10$, e questa base viene appunto adottata nelle tavole logaritmiche di maggior uso. Or poichè $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, ec. perciò in questo sistema $l1=0$, $l10=1$, $l100=2$, $l1000=3$, $l10000=4$, ec. Dunque i logaritmi dei numeri compresi fra 1 e 10, dovranno esser maggiori di zero e minori di 1, cioè rotti proprj, e la cifra iniziale del valor loro, ridotto in forma decimale, sarà zero. Quelli dei numeri compresi fra 10 e 100 saranno >1 e <2 cioè eguali all'unità congiunta ad una frazione. Egualmente quelli dei numeri fra 100 e 1000 saranno >2 e <3, cioè saranno eguali a 2 più una frazione, ec. Perciò eccettuati i numeri della serie 1, 10, 100, 1000, ec. i logaritmi di tutti gli altri saranno composti di due parti, l'una esprimente interi e che si chiama *caratteristica* del logaritmo, l'altra frazionaria, chiamata, ma non molto comunemente, *giunta* o *mantissa*.

313. La caratteristica è sempre di un'unità minore del numero delle cifre degl' interi del numero dato. Così nel logaritmo di 384 la caratteristica è 2, in quello di 10248 è 4, in quello di 4,253 è 0. Infatti i numeri fra 0 e 10 son di una sola cifra, e come si è veduto hanno zero per caratteristica; quelli tra 10 e 100 son di due cifre, ed hanno 1 per caratteristica; quelli tra 100 e 1000 son di tre cifre ed han 2 per caratteristica ec. Dato dunque un numero può sempre sapersi qual sia la caratteristica, o a quanto ascenda la parte

intera del suo logaritmo: come all'opposto, dato il logaritmo può dalla caratteristica sapersi quante cifre d'interi son contenute nel numero che gli corrisponde. Quanto alla parte decimale vedremo in seguito quali vie si son tenute per calcolarla. Per ora basti prevenire che tutti i logaritmi, a riserva di quelli spettanti alla serie summentovata, sono, come vedremo, quantità insommabili; quindi la parte decimale non può essere esatta, e contiene un errore nell'ultima cifra che può ascendere fino alla metà del valore spettante alla classe, cui quella cifra appartiene (77).

314. Le tavole logaritmiche più sparse e più conosciute fra noi sono quelle di *Gardiner*, delle quali si hanno quattro copiose e assai corrette edizioni eseguite sotto i nostri occhi in Firenze. Noi le supponiamo già fra le mani dei nostri lettori. I logaritmi vi son disposti con particolare artifizio, di cui si rende ampio conto nei preliminari, ove diffusamente s'insegna l'una e l'altra di queste due pratiche, cioè: *dato un numero qualunque intero* o *rotto*, *cercarne il logaritmo*; *dato un logaritmo cercare il numero a cui corrisponde*. Conviene essersi ben addestrati in ambedue, prima di passare a conoscere le proprietà dei logaritmi e l'uso vantaggiosissimo che può farsene, sia per compendiare e facilitare i calcoli numerici specialmente ove occorrano divisioni ed estrazioni di radici, sia per risolver non pochi quesiti, per i quali l'algebra comune è affatto insufficiente.

Proprietà ed usi dei Logaritmi in generale.

315. Si abbiano le due equazioni I.ª $a^m=b$, II.ª $a^n=c$, che danno III.ª $m=lb$, IV.ª $n=lc$. Poichè moltiplicando le prime due si ha $a^{m+n}=bc$, dividendole si ha $a^{m-n}=\frac{b}{c}$, sarà altresì $m+n=lbc$, $m-n=l\frac{b}{c}$: ma dalla III.ª e IV.ª si ha $m+n=lb+lc$, $m-n=lb-lc$, dunque 1.° $lbc=lb+lc$, cioè il *logaritmo di un prodotto eguaglia la somma dei logaritmi dei suoi fattori*: 2.° $l\frac{b}{c}=lb-lc$, cioè *il logaritmo di un quoziente eguaglia la differenza fra i logaritmi del dividendo e del divisore.*

316. Elevando la I.ª alla potenza p, avremo $a^{mp}=b^p$, all'opposto estraendone la radice p, avremo (191 1.°) $a^{\frac{m}{p}}=\sqrt[p]{b}$; quindi $mp=lb^p$, ed $\frac{m}{p}=l\sqrt[p]{b}$. Ma dalla III.ª si ha $mp=plb$, $\frac{m}{p}=\frac{1}{p}lb$, dunque 3.° $lb^p=plb$, cioè *il logaritmo di una potenza* b^p *eguaglia il prodotto dell'esponente* p *nel logaritmo della radice*; 4.° $l\sqrt[p]{b}=\frac{1}{p}lb$, cioè *il logaritmo della radice* p^{sima} *di* b *eguaglia il logaritmo di* b *diviso per* p.

317. Con questi principj si ottengono i prodotti per via di semplici somme, i quozienti per via di sottrazioni, le potenze per via di moltiplicazioni,

le radici per via di semplici divisioni. Infatti volendo per esempio moltiplicare o divider l'uno per l'altro i due numeri a, b, non dovremo che cercarne i logaritmi e quindi sommargli o sottrargli: il numero corrispondente alla somma o alla differenza sarà il prodotto o il quoziente cercato. Come pure se dato il numero a, vogliasene la potenza o la radice m^{sima}, non dovremo che cercarne il logaritmo e moltiplicarlo o dividerlo per m: ed il numero corrispondente al prodotto o al quoziente, sarà la potenza o la radice cercata. Non alleghiamo esempj numerici, dei quali i preliminari citati (314) sono a sufficienza provvisti. Solo avvertiremo che come le ordinarie tavole logaritmiche non hanno che una limitata estensione, così i numeri corrispondenti non risultano esatti che fino alla 6.ª o al più alla 7.ª cifra; quindi l'uso dei logaritmi cessa d'essere vantaggioso, qualora il rigore del risultamento esiga un più esteso numero di cifre. Questo caso è per altro molto infrequente. Intanto poniamo qui alcuni esempj, dai quali meglio si apprenderà ad applicare alle formule algebriche i logaritmi, secondo i già esposti principj.

$$Labcd \text{ ec.} = La+Lb+Lc+Ld+ \text{ ec.};\ L(a^2-x^2)=L(a+x)+L(a-x).$$

$$L\frac{abc}{de}=La+Lb+Lc-Ld-Le;\ L\frac{ab+bc}{m+n}=Lb+L(a+c)-L(m+n).$$

$$L\left(\frac{a+x}{a-x}\right)=L(a+x)-L(a-x);\ L\sqrt{(a^2-x^2)}=\frac{1}{2}L(a+x)+\frac{1}{2}L(a-x).$$

$$La^m=mLa;\ La^{-m}=-mLa;\ La^mp^bc^q=mLa+bLp+qLc.$$

$$La^{\frac{m}{n}}=\frac{m}{n}La;\ La^{-\frac{m}{n}}=-\frac{m}{n}La;\ L\frac{ax^n}{p^m}=La+nLx-mLp.$$

$$L\sqrt[n]{(a^3-x^3)^m}=\frac{m}{n}L(a-x)+\frac{m}{n}L(a^2+ax+x^2).$$

$$L\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{(a+x)^2}=\frac{1}{2}L(a-x)+\frac{1}{2}L(a+x)-2L(a+x)=\frac{1}{2}L(a-x)-\frac{3}{2}L(a+x).$$

$$L\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}=L1-\frac{1}{2}L(1+x^2)=-\frac{1}{2}L(1+x^2).$$

$$L3a^2+La^4+5L3=L3+2La+4La+5L3=6L3+6La=6L3a=L(3a)^6$$

Calcolo dei Logaritmi per mezzo delle Serie.

*318. Sia y un numero qualunque, e voglia trovarsi l'espressione algebrica del suo logaritmo. Dovrà questa esser tale che si riduca da sè medesima a zero quando $y=1$ e che divenga assurda, quando si fa $y=0$, giacchè il logaritmo di zero non può concepirsi. Ora a ciò non sodisfarebbe la supposizione di Log. $y=A+By+Cy^2+Dy^3+$ ec. perchè la serie $A+By+Cy^2+Dy^3+$ ec. con $y=1$, diventa $A+B+C+D+$ ec., e con $y=0$, diventa A. Per evitare questi inconvenienti, porremo Log. $y=A(y-1)+B(y-1)^2+C(y-1)^3+$ ec.; ovvero, fatto $y-1=x$ e quindi $y=1+x$, Log. $(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ ec. Qui pure si osserverà, come facem-

mo per il binomio, che cambiando x in $x(2+x)$ la nostra funzione Log. $(1+x)$ diventa Log. $(1+2x+x^2)$ ossia Log. $(1+x)^2$ che, come sappiamo (316. 3.°), equivale a 2 Log. $(1+x)$; dimodochè questo cangiamento produce il medesimo effetto della moltiplicazione di Log. $(1+x)$ per 2. Ciò posto, eseguito l'indicato cambiamento di x in $x(2+x)$ in ambedue i membri dell'equazione $L(1+x)=Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ ec., avremo

$$1.^a \quad 2L(1+x)=Ax(2+x)+Bx^2(2+x)^2+Cx^3(2+x)^3+\text{ ec.}$$

Moltiplicata per 2 la stessa equazione, risulterà

$$2.^a \quad 2L(1+x)=2Ax+2Bx^2+2Cx^3+2Dx^4+\text{ ec.}$$

sottraendo poi dalla 2.ª la 1.ª e sviluppate le parentesi, avremo

$$0=\left\{\begin{array}{r} 2Ax+2Bx^2+2Cx^3+\ 2Dx^4+\text{ ec.}\\ -2Ax-\ Ax^2-4Bx^3-\ \ Bx^4-\text{ ec.}\\ -4Bx^2-8Cx^3-12Cx^4-\text{ ec.}\\ -16Dx^4-\text{ ec.}\end{array}\right.$$

e di qui $A=A$, $B=-\frac{1}{2}A$, $C=\frac{1}{3}A$, $D=-\frac{1}{4}A$, ec., onde $L(1+x)=$ $A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{ ec.}\right)$

319. Per determinare il valore di A, cioè del coefficiente di x alla prima potenza che qui pure, come nello sviluppo di $(1+x)^m$ (300), per analoghe ragioni resta indeterminato; supposta a la base dei logaritmi, poniamo $1+x=\frac{1}{a}$. Sarà $x=\frac{1-a}{a}=-\frac{a-1}{a}$ e quindi $l(1+x)=la^{-1}=-1$ (311. 4.°) $=-A\left(\frac{a-1}{a}+\frac{(a-1)^2}{2a^2}+\frac{(a-1)^3}{3a^3}+\frac{(a-1)^4}{4a^4}+\text{ ec.}\right)$, d'onde $A=$ $1:\left(\frac{a-1}{a}+\frac{(a-1)^2}{2a^2}+\frac{(a-1)^3}{3a^3}+\text{ ec.}\right)$. Così ponendo $a=10$, avremo $A=$ $1:\left(\frac{9}{10}+\frac{9^2}{2.10^2}+\frac{9^3}{3.10^3}+\text{ ec.}\right)$, e fatti i calcoli, $A=\frac{1}{2{,}302585092994045684\text{ec.}}=$ $0{,}4342944819032518276511$ ec.

Questo numero o valore di A chiamasi *modulo:* varia con la base, da cui dipende, ed è per conseguenza diverso in ogni sistema di logaritmi. Chiamati A, A_1 i moduli in due diversi sistemi, e supposti l, l_1 i logaritmi che nell'uno e nell'altro appartengono ad uno stesso numero avremo evidentemente $A:A_1::l:l_1$, e quindi $l_1=\frac{A_1 l}{A}$; cioè *i logaritmi dell'un sistema si ridurranno a quelli dell'altro moltiplicandoli per il rapporto* $\frac{A_1}{A}$ *dei respettivi due moduli.*

320. *Nepero* gentiluomo scozzese, a cui è principalmente dovuta la felice invenzione dei logaritmi, in luogo di supporre ad arbitrio una base, preferì di determinare il modulo, che pose eguale all'unità. I logaritmi così calcolati si dissero *Neperiani*, e anche *naturali* o *iperbolici*, per ragioni che

in appresso daremo. Son dunque rappresentati dalla serie $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-$ ec. e si riducono a logaritmi *ordinarj*, cioè con la base 10, moltiplicandoli per $A=\frac{1}{2{,}30258509299\text{ec.}}=0{,}4342944819$ ec. Godono di rimarchevoli proprietà che svilupperemo a suo luogo.

321. Ripresa adesso l'equazione $L(1+x)=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{ec.}\right)$, si cangi x in $-x$ ed avremo $L(1-x)=-A\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\text{ec.}\right)$, e di qui $L(1+x)-L(1-x)=L\frac{1+x}{1-x}$ (315. 2.°) $=2A\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\text{ec.}\right)$. Fatto frattanto $\frac{1+x}{1-x}=\sqrt[m]{n}$, onde $x=\frac{\sqrt[m]{n}-1}{\sqrt[m]{n}+1}$ avremo sostituendo, $L\sqrt[m]{n}=(316)\ \frac{1}{m}Ln=2A\left(\frac{\sqrt[m]{n}-1}{\sqrt[m]{n}+1}+\frac{(\sqrt[m]{n}-1)^3}{3(\sqrt[m]{n}+1)^3}+\text{ec.}\right)$, serie che nel caso di $n>1$ può rendersi quanto si voglia convergente, potendo sempre darsi ad m un valor tanto grande che $\sqrt[m]{n}$ differisca quanto si voglia poco dall'unità.

322. Essendo dato un logaritmo l, voglia ora trovarsi l'espressione algebrica del numero n a cui corrisponde. Posto $n=1+x$, si avrà $l=Ln=L(1+x)=(318)\ A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\text{ec.}\right)$ e fatto $\frac{l}{A}=p$, il metodo inverso delle serie (308) darà $n=1+x=1+p+\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2.3}p^3+\frac{1}{2.3.4}p^4+\text{ec.}$

323. Se il logaritmo di cui si vuole il numero corrispondente è iperbolico, avremo $A=1$, $p=Ln$, ed $n=1+Ln+\frac{1}{2}L^2n+\frac{1}{2.3}L^3n+\frac{1}{2.3.4}L^4n+\text{ec.}$ Di qui, cangiando n in n^m, risulta $n^m=1+Ln^m+\frac{1}{2}L^2n^m+\text{ec.}=1+mLn+\frac{1}{2}Ln^mLn^m+\text{ec.}=1+mLn+\frac{1}{2}m^2L^2n+\frac{1}{2.3}m^3L^3n+\text{ec.}$; e se sia $n=e$, intendendo per e la base dei logaritmi iperbolici (320), sarà $Ln=Le=1$ (311. 2.°), ed $e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\text{ec.}=2{,}718281828459$ ec. Sarà pure $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1}{2.3.4}x^4+\text{ec.}$

Applicazioni dell' Algebra alle regole superiori dell' Aritmetica.

323. ***Regola di semplice falsa posizione.*** È così chiamata una regola, con la quale gli Aritmetici sciolgono non poca parte dei problemi di 1.° grado indipendentemente da ogni metodo algebrico. In luogo dell' incognita x assumono qualunque numero arbitrario a, e sperimentando su questo le condizioni del Problema, se in luogo del vero risultamento q trovano il falso q_1 instituiscono la proporzione $q_1 : q :: a : x$, d' onde hanno $x = \frac{aq}{q_1}$. Così: voglio un numero tale che la metà, il quarto e il quinto di esso formino 456. Suppongo che sia 20; di cui 10 è la metà, 5 il quarto, 4 il quinto. Or queste parti sommate danno il falso risultamento 19 in luogo del vero 456. Dunque $19 : 456 :: 20 : x = 480$, numero cercato.

Questo metodo non può peraltro estendersi che a quei soli Problemi, i quali o direttamente o per via di qualche facile industria, portano ad un' equazione della forma $px = q$. Allora la supposizione del numero arbitrario a in luogo di x, dà luogo all' equazione $ap = q_1$, per cui divisa l' altra $px = q$ si ha $\frac{x}{a} = \frac{q}{q_1}$, e quindi $q_1 : q :: a : x$.

*324. ***Regola di doppia falsa posizione.*** Presi successivamente due numeri a piacere p_1 e p_2, si sperimentano sopra di essi le condizioni del problema, e trovando che queste non restano soddisfatte, si notano gli errori e_1, e_2 ai quali dan respettivamente luogo i numeri supposti, ossia, come suol dirsi, le due *posizioni*. In seguito si moltiplica ciascuna posizione per l' errore derivato dall' altra, e quindi si divide la differenza dei prodotti per la differenza degli errori. Se il problema è di primo grado, il quoziente così ottenuto esprime il valore dell' incognita, talmentechè si ha $x = \frac{p_1 e_2 - p_2 e_1}{e_2 - e_1}$, avvertendo per altro che gli errori e_1, e_2 debbono prendersi con i segni che avranno secondo la diversità dei casi.

Esempio. Un giocatore scommette 12 contro 8 ad ogni partita; ne fa 10 e tira 20: quante ne ha vinte? Suppongo 9, e dovrà avere 72; ma siccome ne perde una e quindi deve pagare 12, la vincita si riduce a 60 e risulta perciò un errore di $+40$, giacchè la vincita deve essere 20. Suppongo 8 le partite vinte; il giocatore dovrà avere 64 e pagare 24, dimodochè la vincita sarà 40; e siccome questa doveva essere 20, risulterà un secondo errore di $+20$. Dispongo ora come di fianco le posizioni e gli errori, moltiplico 9 per 20 e 8 per 40, divido la differenza 140 dei prodotti per la differenza 20 ed ho 7 partite vinte.

1.ª Pos. 9	2.ª Pos. 8
1.° Er. $+40$	2.° Er. $+20$

Se la seconda posizione fosse stata 3 invece di 8, avrebbe portato l' errore -80. In questo caso i prodotti sarebbero stati $+120$, -720; la differenza

dei prodotti avrebbe dato $+840$, quella degli errori $+120$, e il quoziente di queste differenze avrebbe dato 7 come sopra.

Facile è il rendersi conto dell' esattezza di questa regola nella soluzione dei problemi di primo grado. A quest' effetto basta osservare che l' equazione $x=\frac{p_1e_2-p_2e_1}{e_2-e_1}$ è una trasformazione dell' altra $\frac{x-p_1}{x-p_2}=\frac{e_1}{e_2}$, ossia della proporzione $x-p_1:x-p_2::e_1:e_2$, e che in conseguenza la regola si fonda sull' ipotesi, che per l' indole del problema gli errori debbano essere proporzionali alle differenze che passano tra l' incognita e ciascuna delle due posizioni, il che appunto nei problemi di primo grado si verifica sempre. E invero se nell' equazione $ax+m=bx+n$, che rappresenta qualunque equazione (226) e quindi qualunque problema di primo grado a una incognita, si pongono successivamente p_1 e p_2 in luogo di x, ne risultano le altre due equazioni $ap_1+m=bp_1+n+e_1$, $ap_2+m=bp_2+n+e_2$, in forza degli errori provenienti da tal sostituzione, e queste sottratte da quella danno $a(x-p_1)=b(x-p_1)-e_1$, $a(x-p_2)=b(x-p_2)-e_2$ o meglio $(x-p_1)(a-b)=-e_1$, $(x-p_2)(a-b)=-e_2$ che divise l' una per l' altra conducono precisamente alla relazione $\frac{x-p_1}{x-p_2}=\frac{e_1}{e_2}$.

Osserveremo che i numeri p_1, p_2 essendo affatto arbitrari, nulla vieta che si faccia $p_1=0$, $p_2=1$; ma allora la formula $x=\frac{p_1e_2-p_2e_1}{e_2-e_1}$ diventa $x=\frac{e_1}{e_1-e_2}$, dunque dopo avere sperimentati nel dato quesito i valori *zero* e *uno*, la regola si riduce a dividere semplicemente il primo errore per la differenza dei due errori.

*325. *Regola di alligazione.* Questa regola ha per oggetto di determinare il prezzo di una mescolanza o di un composto, allorchè son dati i prezzi e le quantità delle materie componenti; e consiste nel moltiplicare il prezzo di ciascuna materia per la quantità che se ne impiega nella formazione del composto, e nel dividere la somma dei prodotti per la somma delle quantità impiegate.

Abbiansi le materie M_1, M_2, M_3, ec. siano p_1, p_2, p_3, ec. i respettivi prezzi dell' unità di ognuna di queste materie, ed m_1, m_2, m_3, ec. le respettive quantità che se ne prendono per formare il composto M. Se un' unità di M_1 vale p_1, le m_1 unità di questa materia che entrano nel composto varranno m_1p_1; similmente varranno m_2p_2 le m_2 unità di M_2, m_3p_3 le m_3 unità di M_3, ec. Così il prezzo di tutto il composto sarà evidentemente $p_1m_1+p_2m_2+p_3m_3+$ ec. Ma se si rappresenta con p il prezzo di un' unità del composto e si avverte che esso contiene $m_1+m_2+m_3+$ ec. unità, si fa manifesto che il prezzo totale è dato anche da $p(m_1+m_2+m_3+$ ec.) Eguagliando dunque queste due espressioni, ed isolando p, risulterà $p=\frac{p_1m_1+p_2m_2+p_3m_3+\text{ec.}}{m_1+m_2+m_3+\text{ec.}}$ come appunto prescrive la regola.

*326. Ma se all' opposto si volesser trovare le quantità m_1, m_2, m_3, ec.

dati che fossero i prezzi p, p_1, p_2, p_3, ec. del composto e delle materie componenti, il problema riescirebbe evidentemente indeterminato; poichè con l'unica equazione $p=\frac{p_1m_1+p_2m_2+p_3m_3+\text{ec.}}{m_1+m_2+m_3+\text{ec.}}$ si avrebbero tante incognite quante sono le materie da mescolarsi. In tal caso, se sia n il numero delle materie, e perciò delle incognite, e si rappresenti con p_n, il prezzo di un'unità della materia di infima specie, ponendo $m_1=m_2=m_3=$ ec. $=1$ ed isolando m_n, si troverà con tutta facilità $m_n=\frac{p_1+p_2+\text{ec.}-(n-1)p_n}{p-p_n}$ che darà per m_n un valore sempre positivo e così somministrerà una delle soluzioni del problema. Che se poi si aggiungesse la condizione che tutte le quantità m_1, m_2, ec. compresa m_n, oltre ad essere positive, come lo esige l'indole del problema, risultassero intere, converrebbe indispensabilmente ricorrere al metodo che abbiamo stabilito per la soluzione delle equazioni indeterminate.

Allorchè le materie da mescolarsi non son più di due, la formula generale diventa $p=\frac{p_1m_1+p_2m_2}{m_1+m_2}$. Di qui traendosi la proporzione $m_1:m_2::p-p_1:p_2-p$, si conoscerà in qual rapporto debbono mescolarsi le due materie affinchè ne risulti un composto del prezzo assegnato p, purchè sian dati p_1 e p_2.

327. *Regola di società.* Tre Negozianti coi capitali c_1, c_2, c_3 han fatta società di commercio. Il guadagno comune è stato g; qual sarà il guadagno parziale di ciascheduno? Si chiamino x, y, z i tre guadagni: è chiaro che ciascun di questi dovrà stare al guadagno comune g, come al capitale comune $c_1+c_2+c_3$ stanno respettivamente i capitali parziali c_1, c_2, c_3. Avremo dunque per il primo $x:g::c_1:c_1+c_2+c_3$, e quindi $x=\frac{gc_1}{c_1+c_2+c_3}$, e nel modo stesso si troveranno y e z.

328. Due Negozianti hanno posti in società i capitali c_1, c_2 l'uno per il tempo t_1, l'altro per il tempo t_2: il guadagno comune è stato g: qual parte deve averne ciascuno? I guadagni parziali x, y debbono in questo caso esser proporzionali non solo al capitale impiegato, ma ancora alla durata dell'impiego, cioè debbono stare in ragion composta del capitale e del tempo, ossia come il prodotto di questo in quello (129). Avremo dunque $x:y::c_1t_1:c_2t_2$, e quindi (137) $x:x+y::c_1t_1:c_1t_1+c_2t_2$; ma in ipotesi $x+y=g$, dunque $x=\frac{gc_1t_1}{c_1t_1+c_2t_2}$.

329. Tre cagioni operando separatamente producono i tre effetti e_1, e_2, e_3 nei tempi t_1, t_2, t_3. Qual effetto e produrranno nel comun tempo t. Chiamati x, y, z gli effetti separati e corrispondenti al tempo t, avremo $t_1:e_1::t:x=\frac{e_1t}{t_1}$, come egualmente $y=\frac{e_2t}{t_2}$, $z=\frac{e_3t}{t_3}$. Quindi per l'effetto contemporaneo $e=t\left(\frac{e_1}{t_1}+\frac{e_2}{t_2}+\frac{e_3}{t_3}\right)$. Che se vogliamo il tempo in cui le tre cagioni riunite produrranno il dato effetto e, avremo $t=e:\left(\frac{e_1}{t_1}+\frac{e_2}{t_2}+\frac{e_3}{t_3}\right)$.

330. *Regola d' interesse o frutto.* Così chiamasi la regola che determina il frutto annuo o d' un puro capitale o d' un capitale unito ai suoi frutti: nel primo caso l' interesse è *semplice*, nel secondo è *composto*. Ecco i due più comuni problemi dell' uno e dell' altro.

Frutto semplice. I. Diedi lire 15600 all' 8 per 100: che mi si deve per sorte e frutti dopo anni 5? Sia $t=5$ il tempo, $p=15600$ la sorte, r il frutto annuo d' una lira, che si ha dalla proporzione $100:8::1:r=0,08$: e poichè 1 lira in anni 1 frutta r, le lire p in anni t frutteranno prt (142): si avrà dunque tra sorte e frutti la somma $s=p(1+rt)=21840$ lire.

331. II. Riscossa oggi la mia pensione annua di lire 1000 la lascio in seguito per anni 8 al 5 per 100: quanto mi si dovrà dopo quel tempo? Sia $t=8$, $p=1000$, r il frutto annuo d' una lira; e poichè la pensione si paga a fin d' anno, onde nel primo non frutta, il frutto del secondo sarà pr, del terzo $2pr$, e del t^{mo} sarà $(t-1)\ pr$, dunque i frutti sono $pr+2pr+3pr+\ldots\ldots$ $+(t-1)pr=\frac{prt}{2}(t-1)$ (265), che con le pensioni pt, danno $s=\frac{1}{2}pt(2+r(t-1))=9400$ lire.

332. *Frutto composto.* I. Impiegai lire 20000 al 5 per 100, formando ogni anno un nuovo capitale di esse e del loro frutto: che mi si deve in tutto dopo 6 anni? Si ha $t=6$, $p=20000$, $r=0,05$, $q=1+r=1,05$, capitale e frutto d' una lira: e poichè la sorte 1 produce q sorte e frutto nel prim' anno, la sorte q produrrà q^2 sorte e frutto nel secondo, così produrrà q^3 nel terzo, e q^t nel t^{mo}. Frattanto se la sorte 1 divien q^t, la sorte p diverrà $pq^t=s$ somma cercata, da cui tolto p si avrà di puri frutti $s_1=p(q^t-1)$. Per avere s in numeri applico i logaritmi, ed ho $Ls=Lpq^t=(315)Lp+Lq^t=(316)$ $Lp+tLq$. Ora $Lp=L20000=4,3010300$; $Lq=L1,05=0,0211893$; $tLq=6Lq=0,1271358$; valori che sostituiti danno $Ls=4,4281658=L26801,91$: onde $s=26801,91$.

333. II. Impiego annualmente al 4 per 100 una pensione $p=2400$ *lire*, rilasciando i frutti in capitale: qual è il mio credito dopo anni $t=8$? Posto $r=0,04$ e $q=1,04$, poichè al fin del prim' anno il mio credito è p, del secondo $p(1+r)+p=p+pq$, del terzo $(p+pq)(1+r)+p=p+pq+pq^2$, ec. il totale al fin dell' anno t sarà $p+pq+pq^2\ldots+pq^{t-1}=\frac{p(q^t-1)}{r}$ (270) $=s$.

Per ridurre a numeri il valor di s instituisco il calcolo come di fianco, cercando prima a parte col mezzo dei logaritmi il valore di q^t; sottraendone quindi l'unità per aver quello di q^t-1; poi sommando il logaritmo del valor trovato di q^t-1 col logaritmo di p; togliendo infine dalla somma quello di r; il numero cor-

$$
\begin{array}{rl}
Lq= L1,04 = 0,0170333 & \\
tLq = 8L1,04 = 0,1362664 & = L1,368568 \\
 & -1 \\
q^t-1 = & 0,368568 \\
L(q^t-1) = 9,5665176 & \\
Lp = L2400 = 3,3802112 & \\
\text{somma} = 2,9467288 & \\
Lr = L0,04 = 8,6020600 & \\
\text{diff.}^a = 4,3446688 & = L22114,08 \\
s = 22114,08 &
\end{array}
$$

rispondente al logaritmo residuo equivarrà al valor cercato di s. Infatti la formula dà $Ls=Lp+L(q^t-1)-Lr$.

334. Si noti che in tutti i casi d'interesse composto se t è frazionario, dovremo prima calcolare s per la sola parte intera di t, e quindi far uso delle formule del frutto semplice per determinare ciò che il valor trovato di s diverrà nella parte di t che rimane. Infatti non entra il frutto in capitale se non quando è realmente esigibile, cioè al termine completo dell'anno o del mese, secondo che si sarà convenuto. Nel tempo intermedio è unicamente il capitale che rende frutto, e questo è dunque allora semplice e non composto. Eccone un esempio.

Un capitale di lire $355\frac{1}{2}$ al frutto composto del $5\frac{3}{4}$ per 100, in anni $20\frac{1}{2}$ che renderà? Cercheremo prima di tutto quanto renderà in anni 20: e poichè abbiamo $p=355,5$, $q=1,0575$, $t=20$ ed $s=pq^t$; sarà $Ls=Lp+tLq=$... $2,5508396+20\times0,0242804=3,0364476=L1087,546$. Quanto all'aumento dovuto per il mezz'anno che resta, si avrà dalla formola del frutto semplice $s=p(1+rt)$, ponendo $p=1087,546$, $r=0,0575$, $t=0,5$: onde $1+rt=1,02875$, e quindi $Ls=Lp+L(1+rt)=3,0364476+0,0123099=3,0487575=L1118,813$ rendita totale cercata.

335. Da tutte le trovate equazioni, date tre delle quattro quantità p, r (ovvero q), s, t, vien sempre la quarta. Nei casi però d'interesse composto il valor di t non potrà aversi che col mezzo della falsa posizione, o più speditamente coi logaritmi. Eccone un esempio nel quale si cerca t.

In qual tempo t un capitale $p=355\frac{1}{2}$ al frutto composto del $5\frac{3}{4}$ per 100, diverrà $s=1118,813$?

Dalla formula $s=pq^t$ si avrebbe, come sopra, $Ls=Lp+tLq$, e quindi $t=\frac{Ls-Lp}{Lq}=\frac{0,4979180}{0,0242804}$: dunque $Lt=L0,4979180-L0,0242804=1,3119019=L20,507$, valore però non del tutto esatto, per ciò che dicemmo quanto alla parte frazionaria. Per rettificarlo si cercherà qual diverrebbe precisamente il capitale proposto in anni 20 completi: troveremo, come sopra, $s=1087,546$. Quindi col mezzo della formula $s=p(1+rt)$ si cercherà in qual tempo t questo nuovo capitale, impiegato al frutto semplice, diverrà 1118,813, ed avremo

$$t=\frac{s-p}{pr},\ lt=l(s-p)-(lp+lr)=1,4950862-1,7961154=9,6989708=L0,5$$

come doveva essere (*ivi*).

336. *Regola di sconto.* A creditore di una somma s esigibile fra t anni, chiede oggi l'anticipazione del pagamento, accordando l'*abbono* o *sconto* di r per 1. Con qual somma p potremo saldarlo? È chiaro dover p corrispondere ad un capitale che in t anni tra sorte e frutti divenga s; perciò se lo sconto è semplice sarà (330) $p=\frac{s}{1+rt}$, se è composto (332) $p=\frac{s}{q^t}$.

337. Dovendo A pagare a B per t anni una rendita p, conviene di saldarlo oggi interamente, purchè gli venga abbonato lo sconto di r per 1. Con qual somma x potrà far questo saldo? Come nel caso precedente, x dovrà equivalere ad un tal capitale, che impiegato ad r per 1 salga in t anni a quel tanto, a cui monterebbero le rendite anno per anno riscosse da B, e immediatamente da esso impiegate; cioè, nell' ipotesi dell' interesse composto, ad $s=\frac{p(q^t-1)}{r}$ (333). Sostituito dunque questo valore in luogo di s nella formula $p=\frac{s}{q^t}$, avremo per la cercata somma $x=\frac{p(q^t-1)}{q^t(q-1)}$.

338. A vende a B un appezzamento boschivo, dal quale ogni t anni, alla ricorrenza del taglio, si ritraggono scudi s. Supponendo scorsi anni t_1 dal taglio ultimo, si domanda il valore attuale dell'appezzamento, valutato lo sconto semplice di r per 1.

Il legname in essere è un capitale che diverrà s in capo al tempo $t-t_1$: dunque oggi vale (336) $p=\frac{s}{1+r(t-t_1)}$. Il suolo sarà dopo il taglio un capitale che in t anni renderà il frutto s, e che perciò a quell'epoca varrà $p_1=\frac{s}{rt}$: ma oggi non costa che un capitale p_2 tale da divenir p_1 tra sorte e frutti negli anni $t-t_1$ che mancano al taglio. Sarà dunque l'attual prezzo del suolo $p_2=\frac{p_1}{1+r(t-t_1)}(336)=\frac{s}{rt(1+r(t-t_1))}$; onde per il valore totale dell'appezzamento avremo $p+p_2=\frac{s(1+rt)}{rt(1+r(t-t_1))}$. Che se lo sconto debba esser composto, come in questi casi è più naturale e più conforme all' uso, avremo allora $p=\frac{s}{q^{t-t_1}}$, $p_1=\frac{s}{q^t-1}$, $p_2=\frac{s}{q^{t-t_1}(q^t-1)}$, $p+p_2=\frac{sq^{t_1}}{q^t-1}$.

339. *Annualità.* Data al frutto semplice di r per 1 una sorte p, risolvo di consumare in t anni e sorte e frutti, ritirando annualmente un'egual somma x. Cerco x. Al termine del 1.° anno il mio credito è (333) $p(1+r)$, da cui tolta x, resta fruttifera per il 2.° anno la sorte $p(1+r)-x$. Questa al termine del nuovo anno diviene (*ivi*) $s=(p(1+r)-x)(1+r)=p(1+r)^2-x(1+r)$, e tolta x resta fruttifera per tutto il 3.° anno la sorte $p(1+r)^2-x(1+r)-x$. Al termine di questo la nuova sorte diviene $(p(1+r)^2-x(1+r)-x)(1+r)=\ldots$ $p(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)$, e tolta x resta per il 4.° anno $p(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$. Così continuando si troverà per l'anno 5.° $p(1+r)^4-x(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$, per il 6.° $p(1+r)^5-x(1+r)^4-x(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$, e per l'anno $t+1$ in generale $p(1+r)^t-x(1+r)^{t-1}-x(1+r)^{t-2}-$ec.$-x$, ove tutti i termini negativi formano una progressione geometrica decrescente (258), in cui abbiamo $a=x(1+r)^{t-1}$, $\omega=x$, $q=\frac{1}{1+r}$. La somma di questi termini sarà dunque $s=\frac{x}{r}\left((1+r)^t-1\right)$, e quindi per la sorte residua al

principiar dell' anno $t+1$, avremo $p(1+r)^t-\frac{x}{r}\left((1+r)^t-1\right)$, che dovendo per condizione essere zero, darà $x=\frac{pr(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$. E qui pure come in tutte le formule precedenti date tre delle quattro quantità p, r, t, x potrà aversi la quarta. Ecco un esempio in cui l' incognita è t.

Per qual tempo t deve cedersi una rendita a di scudi $262\frac{1}{3}$, onde estinguere un debito p di scudi $2693\frac{7}{8}$, valutato il frutto semplice a $5\frac{1}{3}$ per 100?

Avremo $x=a=\frac{787}{3}$, $p=\frac{21551}{8}$, $r=\frac{4}{75}$. $(1+r)^t=\frac{a}{a-pr}$, $tl(1+r)=la-l(a-pr)$, e $t=\frac{la-l(a-pr)}{l(1+r)}=\frac{0,3445191}{0,0225658}$. Dunque $t=l0,3445191-l0,0225658=1,1838004=l15,2686$. cioè $t=$ anni 15, mesi 3 e giorni 7.

340. Termineremo gli elementi dell' Algebra con alcuni Problemi, nella soluzione dei quali i giovani studiosi potranno utilmente esercitarsi.

I.° A chi mi domandò che ora fosse, risposi: tre quarti dell' ore battute son due terzi dell' ore che batteranno. Quali ore erano? *Ris.* 8.

II.° Uno avea 6^l quando ritirò il salario di 5 mesi: due mesi dopo avea già spesi $\frac{3}{4}$ del suo danaro; ma riscosso il salario, si trovò con 99^l. Quanto avea il mese? *Ris* 30^l.

III.° Una Contadina porta dell' uova al mercato, e ad un primo avventore ne vende la metà più $\frac{1}{2}$; ad un secondo la metà delle rimanenti più $\frac{1}{2}$; ad un terzo la metà delle rimanenti più $\frac{1}{2}$: dopo di che non le ne restarono che 2. Quante ne aveva? *Ris.* 23.

IV.° Un ricco Signore proprietario di 140000 scudi lascia morendo la moglie incinta, e dispone che nascendo un maschio sia erede per i due terzi, e per l'altro terzo la madre; nascendo una femmina, abbia i due terzi la madre, il rimanente la figlia. Accade che nascono insieme un maschio ed una femmina. Come distribuirete l'eredità? *Ris.* Si daranno al maschio 80000 scudi, alla femmina 20000, alla madre 40000.

V.° Dando tre soldi per uno a dei poveri, mi mancano 9 soldi; ma dandone 2, me ne avanzan 2. Quanti sono i soldi ed i poveri? *Ris.* I soldi son 24 ed i poveri 11.

VI.° L'età a di uno è m^{pla} di quella di suo figlio; tra quanti anni sarà n^{pla}? *Ris.* Tra anni $\frac{a(m-n)}{m(n-1)}$.

VII.° C cacciatore promette a B una somma b per ogni scarica in vano, e B promette a C una somma a per ogni scarica in pieno. Dopo un numero n di scariche o C e B nulla si debbono, o C deve a B una

quantità d, o B la deve a C. Trovare in generale le scariche x a vuoto. *Ris.* $x=\frac{an\pm d}{a+b}$.

VIII.° Diviso un numero x in m ed in $m+1$ parti eguali, i lor prodotti si eguagliano. Cerco x. *Ris.* $x=\frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$.

IX.° Con a carte si fanno b monti d'egual numero c di punti, e la prima carta di ciascun monte val dieci se è figura, 1 se è asso, 2 se è due ec., ma l'altre carte del monte valgono ciascuna un sol punto. Fatti i monti e rese le carte d avanzate, se ne avanzano, si chiede quanti punti x facciano le prime carte di tutti i monti. *Ris.* $x=d+b(c+1)-a$.

X.° Uno lascia ai nipoti 120000^l, cioè 12000^l a ciascun maschio, e 9000 a ciascuna femmina. Se avesse lasciate 9000^l ai maschi e 12000 alle femmine, sarebbero avanzate 9000^l. Quanti sono gli uni e l'altre? *Ris.* 7 maschi e 4 femmine.

XI.° Con una divisione di Svizzeri, una di Sassoni e una di Fiamminghi si vuole espugnare una Piazza; il che se riesce, vengono promessi ai Soldati rusponi 901, dei quali dovranno averne uno a testa quelli della Compagnia che la prima penetrerà nella breccia, e il resto dovrà distribuirsi per egual porzione a tutti gli altri. Or si trova che se la breccia verrà superata dagli Svizzeri, gli altri avranno $\frac{1}{2}$ ruspone, se dai Sassoni $\frac{1}{3}$, se dai Fiamminghi $\frac{1}{4}$. A quanto ascendeva la truppa? *Ris.* A 1537 uomini.

XII.° I crediti di 7 persone sommati a 6 a 6 fanno 994, 1036, 840, 910, 896, 952, 882. Qual credito ha ciascuna? *Ris.* Il credito d'una è 91, e di qui gli altri.

XIII.° A raddoppia coi suoi i danari di B e di C, quindi B li raddoppia ad A e a C, e poi C ad A e a B, ed in fine ciascuno ha 16^l. Quanto aveano in principio? *Ris.* Suppongo x, y, z; e trovo $z=8$, e di qui x, y.

XIV.° Qual è il numero x le cui potenze $m, m+2$ prese l'una p e l'altra g volte, si eguagliano? *Ris.* $x=\sqrt{p:g}$.

XV. Son 20 tra uomini e donne in una Locanda, e gli uni e l'altre spendono 24^l; ma ogn'uomo spende 1^l più d'ogni donna. Quanti son gli uni e l'altre? *Ris.* gli uomini sono 8.

XVI.° Due Contadine portano insieme 100 polli al mercato: e quantunque ognuna li venda a differente prezzo, fanno per altro uno stesso guadagno. Se l'una avesse avuti quelli dell'altra, il guadagno della prima sarebbe stato di 15 tolleri, quello della seconda di tolleri 6 $\frac{2}{3}$. Quanti erano i polli? *Ris.* I polli della prima erano 40, quelli della seconda 60.

XVII.° Quali sono i numeri multipli di 7 che divisi per 4, 5 e 6, danno 1 di resto. *Ris.* 301, 721, 1141, ec.

XVIII.° È egli possibile di far 19^l con monete di 24$^{sol.}$, di 12, e di 6? *Ris.* Impossibile.

XIX.° Correndo 9 di Ciclo Solare e Lunare e 3 d'Indizione, apparve in Cielo una grande e singolar Cometa. Che anno era? *Ris.* Il 1680.

XX.° Due corrieri con le celerità m, n partono nel punto stesso, l'uno da Firenze per Livorno, l'altro da Livorno per Firenze, e la distanza tra questi due luoghi è a. Ove s'incontreranno? *Ris.* Sia x la distanza tra Firenze e il punto d'incontro; si avrà $x=\frac{am}{m+n}$.

XXI.° Un orologio tra le 5 e le 6 ha la lancetta dei minuti su quella dell'ore. Che ora è? *Ris.* Ore 5, $27' \frac{3}{11}$.

XXII.° Una lepre ha già fatti b passi quando un cane si muove per inseguirla. I passi del cane son più grandi di quelli della lepre nella ragione di $p:q$; ma mentre il cane ne fa m, la lepre ne fa $a+m$. Cerco se il cane raggiungerà la lepre e dopo quanti passi. *Ris.* Dopo passi $x=\frac{bmp}{mp-(a+m)q}$ purchè sia $mp>(a+m)q$. Se $mp=(a+m)q$ il cane e la lepre avranno una stessa velocità, nè potranno giammai raggiungersi in alcun modo. Se $mp<(a+m)q$ la lepre avrà maggior velocità del cane, nè potrà esser raggiunta finchè fugge davanti a lui: ma potrebbe all'opposto raggiungere il cane, qualora si ponesse a inseguirlo; di qui il valor negativo che prenderebbe in tal caso l'incognita del Problema.

XXIII.° Un mobile fa miglia 9 nel primo giorno, 8 nel secondo ec.; un altro ne fa nel primo giorno 27, nel secondo 18, ec., ambedue ritardando in progressione geometrica decrescente. Qual viaggio verrebbero a fare se camminassero perpetuamente? *Ris.* Miglia 81.

XXIV.° Col mezzo dei logaritmi risolver l'equazioni 1.ª $a^x=b$; 2.ª $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}}=c$, *Ris.* 1.ª $x=\frac{Lb}{La}$, 2.ª $x=\frac{Lc-Lb}{mLa-nLb}$.

XXV.° *A* pose in società il doppio di *B* e di più 5 lire: *A* ebbe di guadagno 660 lire e *B* 300. Cerco i capitali e il frutto. *Ris.* Il capitale di *B* è 25 lire; il frutto è di 12 per 1.

XXVI.° A Pastore prese un pascolo per lire 400: vi tenne in proprio pecore 40 per mesi 6, inoltre vi ammise *B* con pecore 50 per mesi 4, *C* con pecore 60 per mesi 3: ed infine ne ritrasse di soprappiù lire 100 di fieno. Domando quanto dovrà pagare ciascuno di sua porzione. *Ris.* *A* lire 116,129; *B* lire 96,7742; *C* lire 87,0968.

XXVII.° A qual frutto m dovrà impiegarsi un capitale qualunque p, perchè nell'ipotesi d'interesse composto in anni 10 divenga $2p$. *Ris.* al $7 \frac{1}{5}$ per 100.

XXVIII.° Due cannelle empiono separatamente una vasca nei tempi t_1, t_2, e due altre la vuotano nei tempi T_1, T_2. Supponendole tutte contemporaneamente in azione in qual tempo T sarà ripiena la vasca? *Ris.* $T=1:\left(\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}-\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right)$.

XXIX.° Un debitore in vece di pr paga ogni anno la somma $s<pr$. Nell' ipotesi dell'interesse composto di qual somma x sarà debitore al termine del tempo t? *Ris.* $x=pq^t-\frac{s(q^t-1)}{q-1}$.

XXX.° A dovendo a B le somme s_1, s_2 allo scader dei tempi t', t'' offre invece un fondo valutato s. A qual tempo t dovrà farne cessione, nell' ipotesi dell' interesse composto? *Ris.* $t=t'+t''+\frac{Ls-L(s_1q^{t''}+s_2q^{t'})}{Lq}$.

TAVOLA

dei quadrati e dei cubi dei numeri da 1 a 2100.

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
1	1	1	51	2601	132651	101	10201	1030301
2	4	8	52	2704	140608	02	10404	1061208
3	9	27	53	2809	148877	03	10609	1092727
4	16	64	54	2916	157464	04	10816	1124864
5	25	125	55	3025	166375	05	11025	1157625
6	36	216	56	3136	175616	106	11236	1191016
7	49	343	57	3249	185193	07	11449	1225043
8	64	512	58	3364	195112	08	11664	1259712
9	81	729	59	3481	205379	09	11881	1295029
10	100	1000	60	3600	216000	10	12100	1331000
11	121	1331	61	3721	226981	111	12321	1367631
12	144	1728	62	3844	238328	12	12544	1404928
13	169	2197	63	3969	250047	13	12769	1442897
14	196	2744	64	4096	262144	14	12996	1481544
15	225	3375	65	4225	274625	15	13225	1520875
16	256	4096	66	4356	287496	116	13456	1560896
17	289	4913	67	4489	300763	17	13689	1601613
18	324	5832	68	4624	314432	18	13924	1643032
19	361	6859	69	4761	328509	19	14161	1685159
20	400	8000	70	4900	343000	20	14400	1728000
21	441	9261	71	5041	357911	121	14641	1771561
22	484	10648	72	5184	373248	22	14884	1815848
23	529	12167	73	5329	389017	23	15129	1860867
24	576	13824	74	5476	405224	24	15376	1906624
25	625	15625	75	5625	421875	25	15625	1953125
26	676	17576	76	5776	438976	126	15876	2000376
27	729	19683	77	5929	456533	27	16129	2048383
28	784	21952	78	6084	474552	28	16384	2097152
29	841	24389	79	6241	493039	29	16641	2146689
30	900	27000	80	6400	512000	30	16900	2197000
31	961	29791	81	6561	531441	131	17161	2248091
32	1024	32768	82	6724	551368	32	17424	2299968
33	1089	35937	83	6889	571787	33	17689	2352637
34	1156	39304	84	7056	592704	34	17956	2406104
35	1225	42875	85	7225	614125	35	18225	2460375
36	1296	46656	86	7396	636056	136	18496	2515456
37	1369	50653	87	7569	658503	37	18769	2571353
38	1444	54872	88	7744	681472	38	19044	2628072
39	1521	59319	89	7921	704969	39	19321	2685619
40	1600	64000	90	8100	729000	40	19600	2744000
41	1681	68921	91	8281	753571	141	19881	2803221
42	1764	74088	92	8464	778688	42	20164	2863288
43	1849	79507	93	8649	804357	43	20449	2924207
44	1936	85184	94	8836	830584	44	20736	2985984
45	2025	91125	95	9025	857375	45	21025	3048625
46	2116	97336	96	9216	884736	146	21316	3112136
47	2209	103823	97	9409	912673	47	21609	3176523
48	2304	110592	98	9604	941192	48	21904	3241792
49	2401	117649	99	9801	970299	49	22201	3307949
50	2500	125000	100	10000	1000000	50	22500	3375000
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
151	22801	3442951	206	42436	8741816	261	68121	17779581
52	23104	3511808	07	42849	8869743	62	68644	17984728
53	23409	3581577	08	43264	8998912	63	69169	18191447
54	23716	3652264	09	43681	9129329	64	69696	18399744
55	24025	3723875	10	44100	9261000	65	70225	18609625
156	24336	3796416	211	44521	9393931	266	70756	18821096
57	24649	3869893	12	44944	9528128	67	71289	19034163
58	24964	3944312	13	45369	9663597	68	71824	19248832
59	25281	4019679	14	45796	9800344	69	72361	19465109
60	25600	4096000	15	46225	9938375	70	72900	19683000
161	25921	4173281	216	46656	10077696	271	73441	19902511
62	26244	4251528	17	47089	10218313	72	73984	20123648
63	26569	4330747	18	47524	10360232	73	74529	20346417
64	26896	4410944	19	47961	10503459	74	75076	20570824
65	27225	4492125	20	48400	10648000	75	75625	20796875
166	27556	4574296	221	48841	10793861	276	76176	21024576
67	27889	4657463	22	49284	10941048	77	76729	21253933
68	28224	4741632	23	49729	11089567	78	77284	21484952
69	28561	4826809	24	50176	11239424	79	77841	21717639
70	28900	4913000	25	50625	11390625	80	78400	21952000
171	29241	5000211	226	51076	11543176	281	78961	22188041
72	29584	5088448	27	51529	11697083	82	79524	22425768
73	29929	5177717	28	51984	11852352	83	80089	22665187
74	30276	5268024	29	52441	12008989	84	80656	22906304
75	30625	5359375	30	52900	12167000	85	81225	23149125
176	30976	5451776	231	53361	12326391	286	81796	23393656
77	31329	5545233	32	53824	12487168	87	82369	23639903
78	31684	5639752	33	54289	12649337	88	82944	23887872
79	32041	5735339	34	54756	12812904	89	83521	24137569
80	32400	5832000	35	55225	12977875	90	84100	24389000
181	32761	5929741	236	55696	13144256	291	84681	24642171
82	33124	6028568	37	56169	13312053	92	85264	24897088
83	33489	6128487	38	56644	13481272	93	85849	25153757
84	33856	6229504	39	57121	13651919	94	86436	25412184
85	34225	6331625	40	57600	13824000	95	87025	25672375
186	34596	6434856	241	58081	13997521	296	87616	25934336
87	34969	6539203	42	58564	14172488	97	88209	26198073
88	35344	6644672	43	59049	14348907	98	88804	26463592
89	35721	6751269	44	59536	14526784	99	89401	26730899
90	36100	6859000	45	60025	14706125	300	90000	27000000
191	36481	6967871	246	60516	14886936	301	90601	27270901
92	36864	7077888	47	61009	15069223	02	91204	543608
93	37249	7189057	48	61504	15252992	03	91809	818127
94	37636	7301384	49	62001	15438249	04	92416	28094464
95	38025	7414875	50	62500	15625000	05	92025	372625
196	38416	7529536	251	63001	15813251	306	93636	28652616
97	38809	7645373	52	63504	16003008	07	94249	934443
98	39204	7762392	53	64009	16194277	08	94864	29218112
99	39601	7880599	54	64516	16387064	09	95481	503629
200	40000	8000000	55	65025	16581375	10	96100	791000
201	40401	8120601	256	65536	16777216	311	96721	30080231
02	40804	8242408	57	66049	16974593	12	97344	371328
03	41209	8365427	58	66564	17173512	13	97969	664297
04	41610	8489664	59	67081	17373979	.14	98596	959144
05	42025	8615125	60	67600	17576000	15	99225	31255875
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
316	99856	31554496	371	137641	51064811	426	181476	77308776
17	100489	855013	72	8384	478848	27	2329	854483
18	1124	32157432	73	9129	895117	28	3184	78402752
19	1761	461759	74	9876	52313624	29	4041	953589
20	2400	768000	75	140625	734375	30	4900	79507000
321	103041	33076161	376	141376	53157376	431	185761	80062991
22	3684	386248	77	2129	582636	32	6624	621568
23	4329	698267	78	2884	54010152	33	7489	81182737
24	4976	34012224	79	3641	439939	34	8356	746504
25	5625	328125	80	4400	872000	35	9225	82312875
326	106276	34645976	381	145161	55306341	436	190096	82881856
27	6929	965783	82	5924	742968	37	0969	83453453
28	7584	35287552	83	6689	56181887	38	1844	84027672
29	8241	611289	84	7456	623104	39	2721	604519
30	8900	937000	85	8225	57066625	40	3600	85184000
331	109561	36264691	386	148996	57512456	441	194481	85766121
32	110224	594368	87	9769	960603	42	5364	86350888
33	0889	926037	88	150544	58411072	43	6249	938307
34	1556	37259704	89	1321	863869	44	7136	87528384
35	2225	595375	90	2100	59319000	45	8025	88121125
336	112896	37933056	391	152881	59776471	446	198916	88716536
37	3569	38272753	02	3664	60236288	47	9809	89314623
38	4244	614472	93	4449	698457	48	200704	915392
39	4921	958219	94	5236	61162984	49	1601	90518849
40	5600	39304000	95	6025	629875	50	2500	91125000
341	116281	39651821	396	156816	62099136	451	203401	91733851
42	6964	40001688	97	7609	570773	52	4304	92345408
43	7649	353607	98	8404	63044792	53	5209	959677
44	8336	707584	99	9201	521199	54	6116	93576664
45	9025	41063625	400	160000	64000000	55	7025	94196375
346	119716	41421736	401	160801	64481201	456	207936	94818816
47	120409	781923	02	1604	964808	57	8849	95443993
48	1104	42144192	03	2409	65450827	58	9764	96071912
49	1801	508549	04	3216	939264	59	210681	702579
50	2500	875000	05	4025	66430125	60	1600	97336000
351	123201	43243551	406	164836	66923416	461	212521	97972181
52	3904	614208	07	5649	67419143	62	3444	98611128
53	4609	986977	08	6464	917312	63	4369	99252847
54	5316	44361864	09	7281	68417929	64	5296	897344
55	6025	738875	10	8100	921000	65	6225	100544625
356	126736	45118016	411	168921	69426531	466	217156	101194696
57	7449	499293	12	9744	934528	67	8089	1847563
58	8164	882712	13	170569	70444997	68	9024	2503232
59	8881	46268279	14	1396	957944	69	9961	3161709
60	9600	656000	15	2225	71473375	70	220900	3823000
361	130321	47045881	416	173056	71991296	471	221841	104487111
62	1044	437928	17	3889	72511713	72	2784	5154048
63	1769	832147	18	4724	73034632	73	3729	5823817
64	2496	48228544	19	5561	560059	74	4676	6496424
65	3225	627125	20	6400	74088000	75	5625	7171875
366	133956	49027896	421	177241	74618461	476	226576	107850176
67	4689	430863	22	8084	75151448	77	7529	8531333
68	5424	836032	23	8929	686967	78	8484	9215352
69	6161	50243409	24	9776	76225024	79	9441	9902239
70	6900	653000	25	180625	765625	80	230400	110592000
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
481	231361	111284641	536	287296	153990656	591	349281	206425071
82	2324	1986168	37	8369	4854153	92	350464	7474688
83	3289	2678587	38	9444	5720872	93	1649	8527857
84	4256	3379904	39	290521	6590819	94	2836	9584584
85	5225	4084125	40	1600	7464000	95	4025	210644875
486	236196	114791256	541	292681	158340421	596	355216	211708736
87	7169	5501303	42	3764	9220688	97	6409	2776173
88	8144	6214272	43	4849	160103007	98	7604	3847192
89	9121	6930169	44	5936	0989184	99	8801	4921799
90	240100	7649000	45	7025	1878625	606	360000	6000000
491	241081	118370771	546	298116	162771336	601	361201	217081801
92	2064	9095488	47	9209	3667323	02	2404	8167208
93	3049	9823157	48	300304	4566592	03	3609	9256227
94	4036	120553784	49	1401	5469149	04	4816	220348864
95	5025	1287375	50	2500	6375000	05	6025	1445125
496	246016	122623936	551	303601	167284151	666	367236	222545016
97	7009	2763473	52	4704	8196608	07	8449	3648543
98	8004	3505992	53	5809	9112377	08	9664	4755712
99	9001	4251499	54	6916	170031464	09	370881	5866529
500	250000	5000660	55	8025	0953875	16	2100	6981000
501	251001	125751501	556	309136	171879616	611	373321	228099131
02	2004	6506008	57	310249	2808693	12	4544	9220928
03	3009	7263527	58	1364	3741112	13	5769	230346397
04	4016	8024064	59	2481	4676879	14	6996	1475544
05	5025	8787625	60	3600	5616000	15	8225	2608375
506	256036	129554216	561	314721	176558481	616	379456	233744896
07	7049	130323843	62	5844	7504328	17	380689	4885113
08	8064	1096512	63	6969	8453547	18	1924	6029032
09	9081	1872229	64	8096	9406144	19	3161	7176659
10	260100	2651000	65	9225	180362125	20	4400	8328000
511	261121	133432831	566	320356	181321496	621	385641	239483061
12	2144	4217728	67	1489	2284263	22	6884	240641848
13	3169	5005697	68	2624	3250432	23	8129	1804367
14	4196	5796744	69	3761	4220009	24	9376	2970624
15	5225	6590875	70	4900	5193000	25	390625	4140625
516	266256	137388096	571	326041	186169411	626	391876	245314376
17	7289	8188413	72	7184	7149248	27	3129	6491883
18	8324	8991832	73	8329	8132517	28	4384	7673152
19	9361	9798359	74	9476	9119224	29	5641	8858189
20	270400	140608000	75	330625	190109375	30	6900	250047000
521	271441	141420761	576	331776	191102976	631	398161	251239591
22	2484	2236648	77	2929	2100033	32	9424	2435968
23	3529	3055667	78	4084	3100552	33	400689	3636137
24	4576	3877824	79	5241	4104539	34	1956	4840104
25	5625	4703125	80	6400	5112000	35	3225	6047875
526	276676	145531576	581	337561	196122941	636	404496	257259456
27	7729	6363183	82	8724	7137368	37	5769	8474853
28	8784	7197952	83	9889	8155287	38	7044	9694072
29	9841	8635889	84	341056	9176704	39	8321	260917119
30	280900	8877000	85	2225	200201625	40	9600	2144000
531	281961	149721291	586	343396	201230056	641	410881	263374721
32	3024	150568768	87	4569	2262003	42	2164	4609288
33	4089	1419437	88	5744	3297472	43	3449	5847707
34	5156	2273304	89	6921	4336469	44	4736	7089984
35	6225	3130375	90	8100	5379000	45	6025	8336125
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³
646	417316	269586136	701	491401	344472101	756	571536	432081216
47	8609	270840023	02	2804	5948408	57	3049	3798093
48	9904	2097792	03	4209	7428927	58	4564	5519512
49	421201	3359449	04	5616	8913664	59	6081	7245479
50	2500	4625000	05	7025	350402625	60	7600	8976000
651	423801	275894451	706	498436	351895816	761	579121	440711081
52	5104	7167808	07	9849	3393243	62	580644	2450728
53	6409	8445077	08	501264	4894912	63	2169	4194947
54	7716	9726264	09	2681	6400829	64	3696	5943744
55	9025	281011375	10	4100	7911000	65	5225	7697125
656	430336	282300416	711	505521	359425431	766	586756	449455096
57	1649	3593393	12	6944	360944128	67	8289	451217663
58	2964	4890312	13	8369	2467097	68	9824	2984832
59	4281	6191179	14	9796	3994344	69	591361	4756609
60	5600	7496000	15	511225	5525875	70	2900	6533000
661	436921	288804781	716	512656	367061696	771	594441	458314011
62	8244	290117528	17	4089	8601813	72	5984	460099648
63	9569	1434247	18	5524	370146232	73	7529	1889917
64	440896	2754944	19	6961	1694959	74	9076	3684824
65	2225	4079625	20	8400	3248000	75	600625	5484375
666	443556	295408296	721	519841	374805361	776	602176	467288576
67	4889	6740963	22	521284	6367048	77	3729	9097433
68	6224	8077632	23	2729	7933067	78	5284	470910952
69	7561	9418309	24	4176	9503424	79	6841	2729139
70	8900	300763000	25	5625	381078125	80	8400	4552000
671	450241	302111711	726	527076	382657176	781	609961	476379541
72	1584	3464448	27	8529	4240583	82	611524	8211768
73	2929	4821217	28	9984	5828352	83	3089	480048687
74	4276	6182024	29	531441	7420489	84	4656	1890304
75	5625	7546875	30	2900	9017000	85	6225	3736625
676	456976	308915776	731	534361	390617891	786	617796	485587656
77	8329	310288733	32	5824	2223168	87	9369	7443403
78	9684	1663752	33	7289	3832837	88	620944	9303872
79	461041	3046839	34	8756	5446904	89	2521	491169069
80	2400	4432000	35	540225	7065375	90	4100	3039000
681	463761	315821241	736	541696	398688256	791	625681	494913671
82	5124	7214568	37	3169	400315553	92	7264	6793088
83	6489	8611987	38	4644	1947272	93	8849	8677257
84	7856	320013504	39	6121	3583419	94	630436	500566184
85	9225	1419125	40	7600	5224000	95	2025	2459875
686	470596	322828856	741	549081	406869021	796	633616	504358336
87	1969	4242703	42	550564	8518488	97	5209	6261573
88	3344	5660672	43	2049	410172407	98	6804	8169392
89	4721	7082769	44	3536	1830784	99	8401	510082399
90	6100	8509000	45	5025	3493625	800	640000	2000000
691	477481	329939371	746	556516	415160936	801	641601	513922401
92	8864	331373888	47	8009	6832723	02	3204	5849608
93	480249	2812557	48	9504	8508992	03	4809	7781627
94	1636	4255384	49	561001	420189749	04	6416	9718464
95	3025	5702375	50	2500	1875000	05	8025	521660125
696	484416	337153536	751	564001	423564751	806	649636	523606616
97	5809	8608873	52	5504	5259008	07	651249	5557943
98	7204	340068392	53	7009	6957777	08	2864	7514112
99	8601	1532099	54	8516	8661064	09	4481	9475129
700	490000	3000000	55	570025	430368875	10	6100	531441000
N¹	N²	N³	N¹	N²	N³	N¹	N²	N³

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
811	657721	533411731	866	749956	649461896	921	848241	781229961
12	9344	5387328	67	751689	651714363	22	850084	3777448
13	660969	7367797	68	3424	3972032	23	1929	6330467
14	2596	9353144	69	5161	6234909	24	3776	8889024
15	4225	541343375	70	6900	8503000	25	5625	791453125
816	665856	543338496	871	758641	660776311	926	857476	794022776
17	7489	5338513	72	760384	3054848	27	9329	6597983
18	9124	7343432	73	2129	5338617	28	861184	9178752
19	670761	9353259	74	3876	7627624	29	3041	801765089
20	2400	551368000	75	5625	9921875	30	4900	4357000
821	674041	553387661	876	767376	672221376	931	866761	806954491
22	5684	5412248	77	9129	4526133	32	8624	9557568
23	7329	7441767	78	770884	6836152	33	870489	812166237
24	8976	9476224	79	2641	9151439	34	2356	4780504
25	680625	561515625	80	4400	681472000	35	4225	7400375
826	682276	563559976	881	776161	683797841	936	876096	820025856
27	3929	5609283	82	7924	6128968	37	7969	2656953
28	5584	7663552	83	9689	8465387	38	9844	5293672
29	7241	9722789	84	781456	690807104	39	881721	7936019
30	8900	571787000	85	3225	3154125	40	3600	830584000
831	690561	573856191	886	784996	695506456	941	885481	833237621
32	2224	5930368	87	6769	7864103	42	7364	5896888
33	3889	8009537	88	8544	700227072	43	9249	8561807
34	5556	580093704	89	790321	2595369	44	891136	841232384
35	7225	2182875	90	2100	4969000	45	3025	3908625
836	698896	584277056	891	793881	707347971	946	894916	846590536
37	700569	6376253	92	5664	9732288	47	6809	9278123
38	2244	8480472	93	7449	712121957	48	8704	851971392
39	3921	590589719	94	9236	4516984	49	900601	4670349
40	5600	2704000	95	801025	6917375	50	2500	7375000
841	707281	594823321	896	802816	719323136	951	904401	860085351
42	8964	6947688	97	4609	721734273	52	6304	2801408
43	710649	9077107	98	6404	4150792	53	8209	5523177
44	2336	601211584	99	8201	6572699	54	910116	8250664
45	4025	3351125	900	810000	9000000	55	2025	870983875
846	715716	605495736	901	811801	731432701	956	913936	873722816
47	7409	7645423	02	3604	3870808	57	5849	6467493
48	9104	9800192	03	5409	6314327	58	7764	9217912
49	720801	611960049	04	7216	8763264	59	9681	881974079
50	2500	4125000	05	9025	741217625	60	921600	4736000
851	724201	616295051	906	820836	743677416	961	923521	887503681
52	5904	8470208	07	2649	6142643	62	5444	890277128
53	7609	620650477	08	4464	8613312	63	7369	3056347
54	9316	2835864	09	6281	751089429	64	9296	5841344
55	731025	5026375	10	8100	3571000	65	931225	8632125
856	732736	627222016	911	829921	756058031	966	933156	901428696
57	4449	9422793	12	831744	8550528	67	5089	4231063
58	6164	631628712	13	3569	761048497	68	7024	7039232
59	7881	3839779	14	5396	3551944	69	8961	9853209
60	9600	6056000	15	7225	6060875	70	940900	912673000
861	741321	638277381	916	839056	768575296	971	942841	915498611
62	3044	640503928	17	840889	771095213	72	4784	8330048
63	4769	2735647	18	2724	3620632	73	6729	921167317
64	6496	4972544	19	4561	6151559	74	8676	4010424
65	8225	7214625	20	6400	8688000	75	950625	6859375
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
976	952576	929714170	1031	1062961	1095912791	1086	1179396	1280824056
77	4529	932574833	32	65024	99104768	87	81569	84365503
78	6484	5441352	33	67089	1102302937	88	83744	87913472
79	8441	8313739	34	69156	05157304	89	85921	91467969
80	960400	941192000	35	71225	08717875	90	88100	95029000
981	962361	944076141	1036	1073296	1111934656	1091	1190281	1298596571
82	4324	6966168	37	75369	15157653	92	92464	1302170688
83	6289	9862087	38	77444	18386872	93	94649	05751357
84	8256	952763904	39	79321	21622319	94	96836	04338584
85	970225	5671625	40	81600	24864000	95	99025	12932375
986	972196	958585256	1041	1083681	1128111921	1096	1201216	1316532736
87	4169	961504803	42	85764	31366088	97	03409	20139673
88	6144	4430272	43	87849	34626507	98	05604	23753192
89	8121	7361669	44	89936	37893184	99	07801	27373299
90	980100	970299000	45	92025	41166125	100	10000	31000000
991	982081	973242271	1046	1094116	1144445336	1101	1212201	1334633301
92	4064	6191488	47	96209	47730823	02	14404	38273208
93	6049	9146657	48	98304	51022592	03	16609	41919727
94	8036	982107784	49	1100401	54320649	04	18816	45572864
95	990025	5074875	50	02500	57625000	05	21025	49232625
996	992016	988047936	1051	1104601	1160935651	1106	1223236	1352899016
97	4009	991026973	52	06704	64252608	07	25449	56572043
98	6004	4011992	53	08809	67575877	08	27664	60251712
99	8001	7002999	54	10916	70905464	09	29881	63938029
1000	1000000	1000000000	55	13025	74241375	10	32100	67631000
1001	1002001	1003003001	1056	1115136	1177583616	1111	1234321	1371330631
02	04004	06012008	57	17249	80932193	12	36544	75036928
03	06009	09027027	58	19364	84287112	13	38769	78749897
04	08016	12048064	59	21481	87648379	14	40996	82469544
05	10025	15075125	60	23600	91016000	15	43225	86195875
1006	1012036	1018108216	1061	1125721	1194389981	1116	1245456	1389928896
07	14049	21147343	62	27844	97770328	17	47689	93668613
08	16064	24192512	63	29969	1201157047	18	49924	9741503[illegible]
09	18081	27243729	64	32096	04550144	19	52161	1401168159
10	20100	30301000	65	34225	07949625	20	54400	04928000
1011	1022121	1033364331	1066	1136356	1211355496	1121	1256641	1408694561
12	24144	36433728	67	38489	14767763	22	58884	12467848
13	26169	39509197	68	40624	18186432	23	61129	16247867
14	28196	42590744	69	42761	21611509	24	63376	20034624
15	30225	45678375	70	44900	25043000	25	65625	23828125
1016	1032256	1048772096	1071	1147041	1228480911	1026	1267876	1427628376
17	34289	51871913	72	49184	31925248	27	70129	31435383
18	36324	54977832	73	51329	35376017	28	72384	35249152
19	38361	58089859	74	53476	38833224	29	74641	39069689
20	40400	61208000	75	55625	42296875	30	76900	42897000
1021	1042441	1064332261	1076	1157776	1245766976	1131	1279161	1446731091
22	44484	67462648	77	59929	49243533	32	81424	50571968
23	46529	70599167	78	62084	52726552	33	83689	54419637
24	48576	73741824	79	64241	56216039	34	85956	58274104
25	50625	76890625	80	66400	59712000	35	88225	62135375
1026	1052676	1080045576	1081	1168561	1263214441	1136	1290496	1466003456
27	54729	83206683	82	70724	66723368	37	92769	69878353
28	56784	86373952	83	72889	70238787	38	95044	73760072
29	58841	89547389	84	75056	73760704	39	97321	77648619
30	60900	92727000	85	77225	77289125	40	99600	81544000
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
1141	1301881	1485446221	1196	1430416	1710777536	1251	1565001	1957816251
42	04164	89355288	97	32809	15072373	52	67504	62515008
43	06449	93271207	98	35204	19374392	53	70009	67221277
44	08736	97193984	99	37601	23683599	54	72516	71935064
45	11025	1501123625	1200	40000	28000000	55	75025	76656375
1146	1313316	1505060136	1201	1442401	1732323601	1256	1577536	1981385216
47	15609	09003523	02	44804	36654408	57	80049	86121593
48	17904	12953792	03	47209	40992427	58	82564	90865512
49	20201	16910949	04	49616	45337664	59	85081	95616979
50	22500	20875000	05	52025	49690125	60	87600	2000376000
1151	1324801	1524845951	1206	1454436	1754049816	1261	1590121	2005142581
52	27104	28823808	07	56849	58416743	62	92644	09916728
53	29409	32808577	08	59264	62790912	63	95169	14698447
54	31716	36800264	09	61681	67172329	64	97696	19487744
55	34025	40798875	10	64100	71561000	65	1600225	24284625
1156	1336336	1544804416	1211	1466621	1775956931	1266	1602756	2029089096
57	38649	48816893	12	68944	80360128	67	05289	33901163
58	40964	52836312	13	71369	84770597	68	07824	38720832
59	43281	56862679	14	73796	89188344	69	10361	43548109
60	45600	60896000	15	76225	93613375	70	12900	48383000
1161	1347921	1564936281	1216	1478656	1798045696	1271	1615441	2053225511
62	50244	68983528	17	81089	1802485313	72	17984	58075648
63	52569	73037747	18	83524	06932232	73	20529	62933417
64	54896	77098944	19	85961	11386459	74	23076	67798824
65	57225	81167125	20	88400	15848000	75	25625	72671875
1166	1359556	1585242296	1221	1490841	1820316861	1276	1628176	2077552576
67	61889	89324463	22	93284	24793048	77	30729	82440933
68	64224	93413632	23	95729	29276567	78	33284	87336952
69	66561	97509809	24	98176	33767424	79	35841	92240639
70	68900	1601613000	25	1500625	38265625	80	38400	97152000
1171	1371241	1605723211	1226	1503076	1842771176	1281	1640961	2102071041
72	73584	09840448	27	05529	47284083	82	43524	06997768
73	75929	13964717	28	07984	51804352	83	46089	11932187
74	78276	18096024	29	10441	56331989	84	48656	16874304
75	80625	22234375	30	12900	60867000	85	51225	21824125
1176	1382976	1626379776	1231	1515361	1865409391	1286	1653796	2126781656
77	85320	30532233	32	17824	69959168	87	56369	31746903
78	87684	34691752	33	20289	74516337	88	58944	36719872
79	90041	38858339	34	22756	79080904	89	61521	41700569
80	92400	43032000	35	25225	83652875	90	64100	46689000
1181	1394761	1647212741	1236	1527696	1888232256	1291	1666681	2151685171
82	97124	51400568	37	30169	92819053	92	69264	56689088
83	99489	55595487	38	32644	97413272	93	71849	61700757
84	1401856	59797504	39	35121	1902014919	94	74436	66720184
85	04225	64006625	40	37600	06624000	95	77025	71747375
1186	1406596	1668222856	1241	1540081	1911240521	1296	1679616	2176782336
87	08969	72446203	42	42564	15864488	97	82209	81825073
88	11344	76676672	43	45049	20495907	98	84804	86875592
89	13721	80914269	44	47536	25134784	99	87401	91933899
90	16100	85159000	45	50025	29781125	1300	90000	97000000
1191	1418487	1689410871	1246	1552516	1934434936	1301	1692601	2202073901
92	20864	93669888	47	55009	39096223	02	95204	07155608
93	23249	97936057	48	57504	43764992	03	97809	12245127
94	25636	1702209384	49	60601	48441249	04	1700416	17342464
95	28025	06489875	50	62500	53125000	05	03025	22447625
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
1306	1705636	2227560616	1361	1852321	2521008881	1416	2005056	2839159296
07	08249	32681443	62	55044	26569928	17	07889	45178713
08	10864	37810112	63	57769	32139147	18	10724	51206632
09	13481	42946629	64	60496	37716544	19	13561	57243059
10	16100	48091000	65	63225	43302125	20	16400	63288000
1311	1718721	2253243231	1366	1865956	2548895896	1421	2019241	2869341461
12	21344	58403328	67	68689	54497863	22	22084	75403448
13	23969	63571297	68	71424	60108032	23	24929	81473967
14	26596	68747144	69	74161	65726409	24	27776	87553024
15	29225	73930875	70	76900	71353000	25	30625	93640625
1316	1731856	2279122496	1371	1879641	2576987811	1426	2033476	2899736776
17	34489	84322013	72	82384	82630848	27	36329	2905841483
18	37124	89529432	73	85129	88282117	.28	39184	11954752
19	39761	94744759	74	87876	93941624	29	42041	18076589
20	42400	99968000	75	90625	99609375	30	44900	24207000
1321	1745041	2305199161	1376	1893376	2605285376	1431	2047761	2930345991
22	47684	10438248	77	96129	10969633	32	50624	36493568
23	50329	15685267	78	98884	16662152	33	53489	42649737
24	52976	20940224	79	1901641	22362939	34	56356	48814504
25	55625	26203125	80	04400	28072000	35	59225	54987875
1326	1758276	2331473976	1381	1907161	2633789341	1436	2062096	2961169856
27	60929	36752783	82	09924	39514968	37	64969	67360453
28	63584	42039552	83	12689	45248887	38	67844	73559672
29	66241	47334289	84	15456	50991104	39	70721	79767519
30	68900	52637000	85	18225	56741625	40	73600	85984000
1331	1771561	2357947691	1386	1920996	2662500456	1441	2076481	2992209121
32	74224	63266368	87	23769	68267603	42	79364	98442888
33	76889	68593037	88	26544	74043072	43	82249	3004685307
34	79556	73927704	89	29321	79826869	44	85136	10936384
35	82225	79270375	90	32100	85619000	45	81025	17196125
1336	1784896	2384621056	1391	1934881	2691419471	1446	2090916	3023464536
37	87569	89979753	92	37664	97228288	47	93809	29741623
38	90244	95346472	93	40449	2703045457	48	96704	36027392
39	92921	2400721219	94	43236	08870984	49	99601	42321849
40	95600	06104000	95	46025	14704875	50	2102500	48625000
1341	1798281	2411494821	1396	1948816	2720547136	1451	2105401	3054936851
42	1800964	16893688	97	51609	26397773	52	08304	61257408
43	03649	22300607	98	54404	32256792	53	11209	67586677
44	06336	27715584	99	57201	38124199	54	14116	73924664
45	10025	33138625	1400	60000	44000000	55	17025	80271375
1346	1812716	2438569736	1401	1962801	2749884201	1456	2119936	3086626816
47	15409	44008923	02	65604	55776808	57	22849	92990993
48	18104	49436192	03	68409	61677827	58	25764	99363912
49	20801	54911549	04	71216	67587264	59	28681	3105745579
50	22500	60375000	05	74025	73505126	60	31600	12136000
1351	1825201	2463846551	1406	1976836	2779431416	1461	2134521	3118535181
52	27904	71326208	07	79649	85366143	62	37444	24943128
53	30609	76813977	08	82464	91309312	63	40369	31359847
54	33316	82309864	09	85281	97260929	64	43296	37785344
55	36025	87813875	10	88100	2803221000	65	46225	44219625
1356	1838736	2493326016	1411	1990921	2809189531	1466	2149156	3150662696
57	41449	98846293	12	93744	15166528	67	52089	57114563
58	44164	2504374712	13	96569	21151997	68	55024	63575232
59	46881	09911279	14	99396	27145944	69	57961	70014709
60	49600	15456000	15	2002225	33148375	70	60900	76523000
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
1471	2163841	3183010111	1526	2328676	3553559576	1581	2499561	3951805941
72	66784	89506048	27	31729	60550183	82	2502724	59309368
73	69729	96010817	28	34784	67549952	83	05889	66822287
74	72676	3202524424	29	37841	74558889	84	09056	74344704
75	75625	09046875	30	40900	81577090	85	12225	81876625
1476	2178576	3215578176	1531	2343961	3588604291	1586	2515396	3989418056
77	81529	22118333	32	47024	95640768	87	18569	96969003
78	84484	28667352	33	50089	3602686437	88	21744	4004529472
79	87441	35223239	34	53156	09741304	89	24921	12099469
80	90400	41792000	35	56225	16805375	90	28100	19679000
1481	2193361	3248367641	1536	2359296	3623878656	1591	2531281	4027268071
82	96324	54932168	37	62369	30961153	92	34464	34866688
83	99289	61515587	38	65444	38052872	93	37649	42474857
84	2202256	68147904	39	68521	45153819	94	40836	50092584
85	05225	74759125	40	71600	52264000	95	44025	57719875
1486	2208196	3281379256	1541	2374681	3659383421	1596	2547216	4065356736
87	11169	88008303	42	77764	66512088	97	50409	73003173
88	14144	94646272	43	80849	73650007	98	53604	80659192
89	17121	3301293169	44	83936	80797184	99	56801	88324799
90	20100	07949000	45	87025	87953625	1600	60000	96000000
1491	2223081	3314613771	1546	2390116	3695119336	1601	2563201	4103684801
92	26064	21287488	47	93209	3702294323	02	66404	11379208
93	29049	27970157	48	96304	09478592	03	69609	19083227
94	32036	34661784	49	99401	16672149	04	72816	26796864
95	35025	41362375	50	2402500	23875000	05	76025	34520125
1496	2238016	3348071936	1551	2405601	3731087151	1606	2579236	4142253016
97	41009	54790473	52	08704	38308608	07	82449	49995543
98	44004	61517992	53	11809	45539377	08	85664	57747712
99	47001	68254499	54	14916	52779464	09	88881	65509529
1500	50000	75000000	55	18025	60028875	10	92100	73281000
1501	2253001	3381754501	1556	2421136	3767287616	1611	2595321	4181062131
02	56004	88518008	57	24249	74555693	12	98544	88852928
03	59009	95290527	58	27364	81833112	13	2601769	96653397
04	62016	3402072064	59	30481	89119879	14	04996	4204463544
05	65025	08862625	60	33600	96416000	15	08225	12283375
1506	2268036	3415662216	1561	2436721	3803721481	1616	2611456	4220112896
07	71049	22470843	62	39844	11036328	17	14689	27952113
08	74064	29288512	63	42969	18360547	18	17924	35801032
09	77081	36115229	64	46096	25694144	19	21161	43659659
10	80100	42951000	65	49225	33037125	20	24400	51528000
1511	2283121	3449795831	1566	2452356	3840389496	1621	2627641	4259406061
12	86144	56649728	67	55489	47751263	22	30884	67293848
13	89169	63512697	68	58624	55122432	23	34129	75191367
14	92196	70384744	69	61761	62503009	24	37376	83098624
15	95225	77265875	70	64900	69893000	25	40625	91015625
1516	2298256	3484156096	1571	2468041	3877292411	1626	2643876	4298942376
17	2301289	91055413	72	71184	84701248	27	47129	4306878883
18	04324	97963832	73	74329	92119517	28	50384	14825152
19	07361	3504881359	74	77476	99547224	29	53641	22781189
20	10400	11808000	75	80625	3906984375	30	56900	30747000
1521	2313441	3518743761	1576	2483776	3914430976	1631	2660161	4338722591
22	16484	25688648	77	86929	21387033	32	63424	46707968
23	19529	32642667	78	90084	29352552	33	66689	54703137
24	22576	39605824	79	93241	36827539	34	69956	62708104
25	25625	46578125	80	96400	44312000	35	73225	70720875
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
1636	2676496	4378747456	1691	2859481	4835382371	1746	3048516	5322708936
37	79769	86781853	92	62864	43965888	47	52009	31859723
38	83044	94826072	93	66249	52559557	48	55504	41020992
39	86321	4402880119	94	69636	61163384	49	59001	50192749
40	89600	10944000	95	73025	69777375	50	62500	59375000
1641	2692881	4419017721	1696	2876416	4878401536	1751	3066001	5368567751
42	96164	27101288	97	79809	87035873	52	69504	77771008
43	99449	35194707	98	83204	95680392	53	73009	86984777
44	2702736	43297984	99	86601	4904335099	54	76516	96209064
45	06025	51411125	1700	90000	13000000	55	80025	5405443875
1646	2709316	4459534136	1701	2893401	4921675101	1756	3083536	5414689216
47	12609	67667023	02	96804	30360408	57	87049	23945093
48	15904	75809792	03	2900209	39055927	58	90564	33211512
49	19201	83962449	04	03616	47761664	59	94081	42488479
50	22500	92125000	05	07025	56477625	60	97600	51776000
1651	2725801	4500297451	1706	2910436	4965203816	1761	3101121	5461074081
52	29104	08479808	07	13849	73940243	62	04644	70382728
53	32409	16672077	08	17264	82686912	63	08169	79701947
54	35716	24874264	09	20681	91443829	64	11696	89031744
55	39025	33086375	10	24100	5000211000	65	15225	98372125
1656	2742336	4541308416	1711	2927521	5008988431	1766	3118756	5507723096
57	45649	49540393	12	30944	17776128	67	22289	17084663
58	48964	57782312	13	34369	26574097	68	25824	26456832
59	52281	66034179	14	37796	35382344	69	29361	35839609
60	55600	74296000	15	41225	44200875	70	32900	45233000
1661	2758921	4582567781	1716	2944656	5053029696	1771	3136441	5554637011
62	62244	90849528	17	48089	61868813	72	39984	64051648
63	65569	99141247	18	51524	70718232	73	43529	73476917
64	68896	4607442944	19	54961	79577959	74	47076	82912824
65	72225	15754625	20	58400	88448000	75	50625	92359375
1666	2775556	4624076296	1721	2961841	5097328361	1776	3154176	5601816576
67	78889	32407963	22	65284	5106219048	77	57729	11284433
68	82224	40749632	23	68729	15120067	78	61284	20762952
69	85561	49101309	24	72176	24031424	79	64841	30252139
70	88900	57463000	25	75625	32953125	80	68400	39752000
1671	2792241	4665834711	1726	2979076	5141885176	1781	3171961	5649262541
72	95584	74216448	27	82529	50827583	82	75524	58783768
73	98929	82608217	28	85984	59780352	83	79089	68315687
74	2802276	91010024	29	89441	68743489	84	82656	77858304
75	05625	99421875	30	92900	77717000	85	86225	87411625
1676	2808976	4707843776	1731	2996361	5186700891	1786	3189796	5696975656
77	12329	16275733	32	99824	95695168	87	93369	5706550403
78	15684	24717752	33	3003589	5204699837	88	96944	16135872
79	19041	33169839	34	06756	13714904	89	3200521	25732069
80	22400	41632000	35	10225	22740375	90	04100	35339000
1681	2825761	4750104241	1736	3013696	5231776256	1791	3207681	5744956671
82	29124	58586568	37	17169	40822553	92	11264	54583088
83	32489	67078987	38	20644	49879272	93	14849	64224257
84	35856	75581504	39	24121	58946419	94	18436	73874184
85	39225	84094125	40	27600	68024000	95	22025	83534875
1686	2842596	4792616856	1741	3031081	5277112021	1796	3225616	5793206336
87	45969	4801149703	42	34564	86210488	97	29209	5802888573
88	49344	09692672	43	38049	95319407	98	32804	12581592
89	52721	18245769	44	41536	5304438784	99	36401	22285399
90	56100	26809000	45	45025	13568625	1800	40000	32000000
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
1801	3243601	5841725401	1856	3444736	6393430016	1911	3651921	6978821031
02	47204	51461608	57	48449	6403769793	12	55744	89782528
03	50809	61208627	58	52164	14120712	13	59569	7000755497
04	54416	70966464	59	55881	24482779	14	63396	11739944
05	58025	80735125	60	59600	34856000	15	67225	22735875
1806	3261636	5890514616	1861	3463321	6445240381	1916	3671056	7033743296
07	65249	5900304943	62	67044	55635928	17	74889	44762213
08	68864	10106112	63	70769	66042647	18	78724	55792632
09	72481	19918129	64	74496	76460544	19	82561	66834559
10	76100	29741000	65	78225	86889625	20	86400	77888000
1811	3279721	5939574731	1866	3481956	6497329896	1921	3690241	7088952961
12	83344	49419328	67	85689	6507781363	22	94084	7100029448
13	86969	59274797	68	89424	18244032	23	97929	11117467
14	90596	69141144	69	93164	28717909	24	3701776	22217024
15	94225	79018375	70	96900	39203000	25	05625	33328125
1816	3297856	5988906496	1871	3500641	6549699311	1926	3709476	7144450776
17	3301489	98805513	72	04384	60206848	27	13329	55584983
18	05124	6008715432	73	08129	70725617	28	17184	66730752
19	08761	18636259	74	11876	81255624	29	21041	77888089
20	12400	28568000	75	15625	91796875	30	24900	89057000
1821	3316041	6038510661	1876	3519376	6602349376	1931	3728761	7200237491
22	19684	48464248	77	23129	12913133	32	32624	11429568
23	23329	58428767	78	26884	23488152	33	36489	22633237
24	26976	68404224	79	30641	34074439	34	40356	33848504
25	30625	78390625	80	34400	44672000	35	44225	45075375
1826	3334276	6088387976	1881	3538161	6655280841	1936	3748096	7256313856
27	37929	98396283	82	41924	65900968	37	51969	67563953
28	41584	6108415552	83	45689	76532387	38	55844	78825672
29	45241	18445789	84	49456	87175104	39	59721	90099019
30	48900	28487000	85	53225	97829125	40	63600	7301384000
1831	3352561	6138539191	1886	3556996	6708494456	1941	3767481	7312680621
32	56224	48602368	87	60769	19171103	42	71364	23988888
33	59889	58676537	88	64544	29859072	43	75249	35308807
34	63556	68761704	89	68321	40558369	44	79136	46640384
35	67225	78857875	90	72100	51269000	45	83025	57983625
1836	3370896	6188965056	1891	3575881	6761990917	1946	3786916	7369338536
37	74569	99083253	92	79664	72724288	47	90809	80705123
38	78244	6209212472	93	83449	83468957	48	94704	92083392
39	81921	19352719	94	87236	94224984	49	98601	7403473349
40	85600	29504000	95	91025	6804992375	50	3802500	14875000
1841	3389281	6239666321	1896	3594816	6815771136	1951	3806401	7426288351
42	92964	49839688	97	98609	26561273	52	10304	37713408
43	96649	60024107	98	3602404	37362792	53	14209	49150177
44	3400336	70219584	99	06201	48175699	54	18116	60598664
45	04025	80426125	1900	10000	59000000	55	22025	72058875
1846	3407716	6290643736	1901	3613801	6869835701	1956	3825936	7483530816
47	11409	6300872423	02	17604	80682808	57	29849	95014493
48	15104	11142192	03	21409	91541327	58	33764	7506509912
49	18801	21363049	04	25216	6902411264	59	37681	18017079
50	22500	31625000	05	29025	13292625	60	41600	29536000
1851	3426201	6341898051	1906	3632836	6924185416	1961	3845521	7541066681
52	29904	52182208	07	36649	35089643	62	49444	52609128
53	33609	62477477	08	40464	46005312	63	53369	64163347
54	37316	72783864	09	44281	56932429	64	57296	75729344
55	41025	83101375	10	48100	67871000	65	61225	87307125
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3
1966	3865156	7598896696	2011	4044121	8132727331	2056	4227136	8690991616
67	69089	7610498063	12	48144	44865728	57	31249	8703679193
68	73024	22111232	13	52169	57016197	58	35364	16379112
60	76961	33736209	14	56196	69178744	59	39481	29091379
70	80900	45373000	15	60225	81333375	60	43600	41816000
1971	3884841	7657021611	2016	4064256	8193540096	2061	4247721	8754552981
72	88784	68682048	17	68289	8205738913	62	51844	67302328
73	92729	80354317	18	72324	17949832	63	55969	80064047
74	96676	92038424	19	76361	30172859	64	60096	92838144
75	3900625	7703734375	20	80400	42408000	65	64225	8805624625
1976	3904576	7715442176	2021	4084441	8254655261	2066	4268356	8818423496
77	08529	27161833	22	88484	66914648	67	72489	31234763
78	12484	38893352	23	92529	79186167	68	76624	44038432
70	16441	50636739	24	96576	91469824	69	80761	56894509
80	20400	62392000	25	4100625	8303765625	70	84900	69743000
1981	3924361	7774159141	2026	4104676	8316073576	2071	4289041	8882603911
82	28324	83938168	27	08729	28393683	72	93184	93477248
83	32289	97729087	28	12784	40725952	73	97329	8908363017
84	36256	7809531004	29	16841	53070389	74	4301476	21261224
85	40225	21346625	30	20900	65427000	75	05625	34171875
1986	3944196	7833173256	2031	4124961	8377705791	2076	4309776	8947094976
87	48169	45011803	32	29024	90176768	77	13929	60030533
88	52144	56862272	33	33089	8402569937	78	18084	72978552
89	56121	68724669	34	37156	14973304	70	22241	85939039
90	60100	80599000	35	41225	27392875	80	26400	9008912000
1991	3064081	7892485271	2036	4145296	8439822656	2081	4330561	9011897441
92	68064	7904383488	37	49369	52264653	82	34724	24893368
93	72049	16203657	38	53444	64718872	83	38889	37905787
94	76036	28215784	39	57521	77185319	84	43056	50928704
95	80025	40149875	40	4161600	89664000	85	47225	63964125
1996	3984016	7952095036	2041	4165681	8502154921	2086	4351396	9077012056
97	88009	64033973	42	69764	14638088	87	55560	90072503
98	92004	76023992	43	73849	27173507	88	59744	9103145472
99	96001	88003999	44	77936	39701184	89	63921	16230969
2000	4000000	8000000000	45	82025	52241125	90	68100	29329000
2001	4004001	8012006001	2046	4186116	8564793336	2091	4372281	9142439571
02	08004	24024008	47	90209	77357823	92	76464	55362688
03	12009	36036027	48	94304	89934592	93	80649	68698357
04	16016	48096064	49	98401	8602523649	94	84836	81846584
05	20025	60150125	4250	4202500	15125000	95	89025	95007375
2006	4024036	8072216216	2051	4206601	8627738651	2096	4393216	0208180736
07	28049	84294343	52	10704	40364608	97	97400	21366673
08	42064	96384512	53	14809	53002877	98	4401604	34565192
09	36081	8108486729	54	18916	65653464	99	05801	47776299
10	40100	20601000	55	23025	78316375	2100	10000	61000000
N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3	N^1	N^2	N^3

TAVOLA

di riduzione delle misure Toscane a misure straniere.

Misure lineari.

Braccio Fiorentino	in	Metri	0,583626
»	»	Tese Francesi	0,299443
»	»	Klefter di Vienna	0,307749
»	»	Yardes Inglesi	0.638263
»	»	Aunes di Parigi	0,491086
»	»	Piedi Francesi	1,796660
»	»	di Vienna	1,846319
»	»	Inglesi	1,914790
»	»	Russi	1,084504
»	»	d'Amsterdam	2.061845
»	»	d'Anversa	2,043580
»	»	di Berlino	1,859570
»	»	di Copenhaghen	1.860933
»	»	di Stockolm	2,058790
»	»	di Varsavia	1,959989
»	»	d'Ancona	1,424972
»	»	di Bologna	1,535453
»	»	di Brescia	1,239147
»	»	di Cesena	1,086358
»	»	di Faenza	1,216470
»	»	d'Imola	1,326448
»	»	di Milano	1,341098
»	»	di Modena	1,115812
»	»	d'Osimo	1,536731
»	»	di Parma	1,236626
»	»	di Pesaro	1,676435
»	»	di Ravenna	0,998317
»	»	di Reggio	1,099314
»	»	di Rimini	1,074916
»	»	Romani antichi	1,983462
»	»	di Torino, piedi di Luitprando	1,134620
»	»	di Urbino	1,424970
»	»	Palmi Romani	2,612215
»	»	Architettonici	1,959157
»	»	di Genova	2,342985
»	»	di Napoli	2,227452

Soldo del Brac. Fior. in		Pollici Francesi	1,080156
»	»	Pollici Inglesi	1,148874
Miglio Toscano in		Tese	848.432700
»	»	Gradi d' Equatore	0,014858
»	»	Miglia Tedesche di 15 al grado	0,222880
»	»	Leghe Francesi di 25 al grado	0,371466
»	»	Leghe Marine di 20 al grado	0,297173
»	»	Miglia Inglesi di 69 al grado	1,025248
»	»	Miglia Italiane, o Geografiche di 60 al grado	0,891520
»	»	Miglia Romane	1,110192
»	»	Miriametri	0,165360

Misure di superficie.

Quadrato Toscano in		Ettari	0,340611
»	»	Arpenti di Parigi di 900 tese quadrate	0,996283
»	»	Acri Inglesi di 1135 tese quadrate	0,790006
»	»	Rubbia Romane	0,184274
»	»	Stiori	6,487896

Misure di capacità.

Barile di vino Toscano in		Ettolitri	0,455839
»	»	Piedi cubici Francesi	1,329863
»	»	*Barrels* Inglesi di poll. c. fr. 601336,6	0,382133
»	»	Barili da olio Toscani	1,363606
»	»	Br. cubiche Fiorentine	0,229302
Staio Toscano in		Ettolitri	0,244191
»	»	Piedi cubici Francesi	0,710763
»	»	Bushels Inglesi	0,692658
»	»	Br. cubiche Fiorentine	0,122554

Pesi.

Libbra Toscana in		Chilogrammi	0,339540
»	»	Libbre Francesi	0,693629
»	»	Libbre Inglesi (Troy)	0,910490
»	»	Libbre Inglesi (Avoir dupois)	0,748182
»	»	Grammi	28,295000
»	»	Once Francesi	0,924994
»	»	Once Inglesi (Avoir dupois)	0,997576
»	»	Once Inglesi (Troy)	0,910490

TAVOLA

di riduzione delle misure straniere a misure Toscane.

Misure lineari.

Metro	in Braccia Fiorentine.	1,713426
Tesa Francese		3,339531
Klafter di Vienna		3,249708
Yards Inglese		1,566730
Aunes di Parigi		2,036302
Piede Francese		0,556588
di Vienna		0,541618
Inglese		0,522230
Russo		0,921868
d'Amsterdam		0,485003
d'Anversa		0,489337
di Berlino		0,537758
di Copenhaghen		0,537365
di Stockolm		0,485722
di Varsavia		0,510207
d'Ancona		0,701768
di Bologna		0,651273
di Brescia		0,807007
di Cesena		0,920307
di Faenza		0,822051
d'Imola		0,753325
di Milano		0,728684
di Modena		0,896208
d'Osimo		0,650732
di Parma		0,808651
di Pesaro		0,596304
di Ravenna		1,001684
di Reggio		0,909658
di Rimini		0,930305
Romano antico		0,504169
di Torino, piede di Luitprando		0,881351
d'Urbino		0,701768
Palmo Romano		0,382817
architettonico		0,510422
di Genova		0,426806
di Napoli		0,448943
Pollice Francese	in Soldi del Brac. Fior.	0,927647
Pollice Inglese		0,870417

Tesa	in Miglia Toscane	0,001767
Grado d' Equatore		67,300746
Miglio Tedesco di 15 al grado		4,456714
Lega Francese di 25 al grado		2,691030
Lega Marina di 20 al grado		3,365038
Miglio Inglese di 69 al grado		0,975373
Miglio Italiano o Geografico di 60 al grado		1,121679
Miglio Romano		0,900745
Miriametro		6,047383

Misure di superficie.

Ettaro	in Quadrati Toscani	2.935896
Arpento di Parigi di 900 tese quadrate		1 003708
Acro Inglese di 1135 tese quadrate		1,265812
Rubbio Romano		5,426794
Stioro		0,154033

Misure di capacità.

Ettolitro	in Barili di vino Toscani	2,194753
Piede cubico Francese		0,751957
Barrels Inglese di poll. c. fr. 601336,6		2,616886
Barile da olio Toscano		0,733349
Braccio cubico Fiorentino		4,361047
Ettolitro	in Staia Toscane	4,103584
Piede cubico Francese		1,406934
Bushels Inglese		1,443713
Braccio cubico Fiorentino		8,159665

Pesi.

Chilogrammo.	in Libbre Toscane	2,945161
Libbra Francese		1,441671
Libbra Inglese (*Troy*)		1,098309
Libbra Inglese (*Avoir dupois*)	in Once Toscane	1,336573
Grammo		0,035341
Oncia Francese		1,081087
Oncia Inglese (*Avoir dupois*)		1,002429
Oncia Inglese (*Troy*)		1,098309

ELEMENTI DI GEOMETRIA.

LIBRO PRIMO.

PRINCIPJ

341. Definizioni. i. La Geometria è una scienza, che ha per oggetto la misura dell'estensione.

L'estensione ha tre dimensioni, lunghezza, larghezza ed altezza.

ii. La *Linea* è una lunghezza senza larghezza.

Le estremità d'una linea si chiamano *punti:* il punto non ha dunque alcuna estensione.

iii. La *Linea retta* è il più corto cammino da un punto ad un altro.

iv. Ogni linea, che non è retta, nè composta di linee rette, è una *linea curva.*

Così AB (Fig. 1) è una linea retta. ACDB una linea spezzata, o composta di linee rette, e AEB è una linea curva.

*Ogni linea può concepirsi come descritta da un punto che muovesi nello spazio; ed è *retta* se il punto che la descrive non cangia mai direzione, cioè se tende continuamente verso un solo e medesimo punto; è *spezzata* se il punto cangia direzione a diversi intervalli di tempo; è *curva* se il punto cangia direzione continuamente.

v. *Superficie* è ciò che ha lunghezza e larghezza senza altezza o grossezza.

vi Il *Piano* è una superficie, nella quale prendendo due punti a piacere, e unendo questi due punti con una linea retta, qnesta linea stia tutta intera nella superficie.

vii. Ogni superficie, che non è piana, nè composta di superficie piane, è una *Superficie curva.*

viii. *Solido* o *Corpo* è ciò che riunisce le tre dimensioni dell'estensione.

*ix. Allorchè due linee rette AB, AC (Fig. 2) partono da un medesimo punto A, la differenza della loro direzione chiamasi *angolo.* Il comun punto di partenza A è il *vertice* dell'angolo; AB e AC ne sono i lati.

L'angolo s' indica talora colla sola lettera del vertice A, talora con tre lettere BAC o CAB, avendo cura di porre in mezzo la lettera del detto vertiee.

Gli angoli sono, come tutte le quantità, suscettibili d'addizione, di sottrazione, di moltiplicazione e di divisione : così (Fig. 20) l'angolo DCE è la somma dei due angoli DCB, BCE, e l'angolo DCB è la differenza dei due angoli DCE, BCE.

x. Quando la linea retta AB (Fig. 3) incontra un'altra retta CD talmente che gli angoli adiacenti BAC, BAD siano uguali fra loro, ognuno di questi angoli si chiama un *angolo retto*, e la linea AB vien detta *perpendicolare* sopra CD.

xi. Ogni angolo BAC (Fig. 4) minore d'un angolo retto è un *angolo acuto*; ogni angolo DEF maggiore del retto è un *angolo ottuso*.

xii. Due linee (Fig. 5) si dicono *parallele*, allorchè essendo situate nel medesimo piano non possono incontrasi, benchè si prolunghino ambedue sino a qualunque distanza.

xiii. *Figura piana* è un piano terminato per ogni parte da linee.

Se le linee son rette, lo spazio, che esse racchiudono, si chiama *Figura rettilinea* o *Poligono*, e le linee stesse prese insieme formano il contorno o *perimetro* del poligono.

xiv, Il poligono di tre lati è il più semplice di tutti, e si chiama *triangolo*; quello di quattro lati si chiama *quadrilatero*; quello di cinque *pentagono*; quello di sei *esagono*, ec.

xv. Si chiama triangolo *equilatero* (Fig. 7) quello, che ha i suoi tre lati uguali; triangolo *isoscele* (Fig. 8) quello, di cui due soli lati sono uguali; triangolo *scaleno* (Fig. 9) quello, che ha i suoi tre lati disuguali.

xvi. Il triangolo *rettangolo* è quello, che ha un angolo retto. Il lato opposto all'angolo retto si chiama *ipotenusa*. Così ABC (Fig. 10) è un triangolo rettangolo in A, e il lato BC è la di lui ipotenusa.

xvii. Fra i quadrilateri si distinguono;

Il *quadrato* (Fig. 11), che ha i suoi lati uguali, e i suoi angoli retti,

Il *rettangolo* (Fig. 12), che ha gli angoli retti senz'avere i lati uguali,

Il *parallelogrammo* o *rombo* (Fig. 13), che ha i lati opposti parelleli,

La *losanga* (Fig. 14), i di cui lati sono eguali senza che gli angoli siano retti,

Finalmente il *Trapezio* (Fig. 15), di cui due soli lati son paralleli.

xviii. Si chiama *diagonale* la linea retta, che unisce i vertici di due angoli non adiacenti; tale è AC (Fig. 42).

xix. Poligono *equilatero* è quello, di cui tutti i lati sono uguali; Poligono *equiangolo* quello di cui tutti gli angoli sono uguali.

xx. Due Poligoni sono *equilateri tra di loro* quando hanno i lati respettivamente uguali, e situati nel medesim'ordine, vale a dire, allorchè seguitando i loro contorni in un medesimo senso, il primo lato dell'uno è uguale al primo dell'altro, il secondo dell'uno al secondo dell'altro, il terzo al terzo, e così di seguito. Nella stessa maniera si concepisce cosa s'intende per due Poligoni *equiangoli tra di loro*.

In ambedue i casi i lati uguali o gli angoli uguali si chiamano lati o angoli *omologhi*.

342. Termini e Segni. *Assioma* è una proposizione evidente di per sè stessa.

Teorema è una verità, che diviene evidente per mezzo d'un ragionamento chiamato *dimostrazione*.

Problema è una questione proposta, che esige una *soluzione*.

Lemma è una verità impiegata sussidiariamente per la dimostrazione di un Teorema, o la soluzion d' un Problema.

Il nome comune di *Proposizione* si attribuisce indifferentemente ai Teoremi, Problemi e Lemmi.

Corollario è la conseguenza, che deriva da una o da più Proposizioni.

Scolio è un' osservazione sopra una o più Proposizioni precedenti, che tende a far vedere il loro legame, la loro utilità, la loro restrizione, o la loro più estesa applicazione.

Ipotesi è una supposizione fatta o nell' enunciato d' una Proposizione, o nel corso d' una Dimostrazione.

I *segni* che si adoprano in Geometria per esprimere l' uguaglianza o la disuguaglianza, come pure quelli che indicano l' addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l' inalzamento a potenza e l' estrazione della radice son quelli stessi che si usano in casi identici nell' Aritmetica e nell' Algebra (146, e segg.).

*Del resto le linee, gli angoli, le superficie, ec., essendo quantità, si assoggettano a quelle stesse operazioni che si fanno sui numeri. Così, per esempio, due linee rette si sommano, intestandole in modo che l' una sia il prolungamento dell' altra; si sottrano, soprapponendole in modo che abbian comune una delle loro estremità. Spesso peraltro, per potere operare sopra le quantità geometriche, è necessario cangiarle in numeri; e questo si ottiene riferendo ognuna delle quantità date alla sua respettiva unità di misura conformemente a ciò che indicammo nell' Aritmetica (91. 92). Vedremo a suo luogo come debbono interpetrarsi il prodotto e il quoziente di due linee, di una linea e di una superficie, ec.

343. Assiomi. 1.° Due quantità eguali a una terza sono eguali fra loro.

2.° Il tutto è maggiore della sua parte.

3.° Il tutto è uguale alla somma delle parti, nelle quali è stato diviso.

4.° Da un punto a un altro non si può condurre che una sola linea retta.

5.° Due grandezze, linee, superficie, o solidi, sono uguali allorchè, essendo situate l' una sull' altra, coincidono in tutta la loro estensione.

PROPOSIZIONE I.

344. Teorema. *Gli angoli retti son tutti eguali fra loro.*

Sia (Fig. 16) la linea retta CD perpendicolare ad AB, e GH ad EF; dico che gli angoli ACD, EGH saranno uguali fra loro.

Prendete le quattro distanze uguali CA, CB, GE, GF; la distanza AB sarà uguale alla distanza EF, e si potrà situare la linea EF sopra AB in maniera che il punto E cada in A, e il punto F in B. Queste due linee così situate coincideranno intieramente l' una con l' altra; poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A a B, il che è impossibile (343. 4.°); dunque il punto G mezzo di EF cadrà sul punto C mezzo di AB. Il lato GE

essendo così applicato sopra CA, dico che il lato GH cadrà sopra CD; poichè supponiamo, s'è possibile, che cada sopra una linea CK differente da CD; siccome, per ipotesi (341, x), l'angolo EGH=HGF, bisognerebbe che si avesse ACK=KCB. Ma l'angolo ACK è maggiore di ACD, e l'angolo KCB è minore di BCD; d'altronde, per ipotesi, ACD=BCD; dunque ACK è maggiore di KCB; dunque la linea GH non può cadere sopra una linea CK differente da CD; dunque essa cade sopra CD, e l'angolo EGH sopra ACD; dunque tutti gli angoli retti sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE II.

345. Teorema. *Ogni linea retta* CD (Fig. 17), *che ne incontra un'altra* AB, *fa con questa due angoli adiacenti* ACD, BCD, *la di cui somma è eguale a due angoli retti.*

Nel punto C alzisi sopra AB la perpendicolare CE. L'angolo ACD è la somma degli angoli ACE, ECD; dunque ACD+BCD sarà la somma dei tre ACE, ECD, BCD. Il primo di questi è retto; gli altri due fanno insieme l'angolo retto BCE; dunque la somma dei due angoli ACD, BCD è eguale a due angoli retti.

**Scolio.* Chiamandosi *supplemento* di un angolo ciò che manca a quest'ultimo per eguagliare la somma di due angoli retti, la proposizione or dimostrata può anche enunciarsi così: *ogni linea retta che ne incontra un'altra, fa con questa due angoli dei quali l'uno è il supplemento dell'altro.*

Corollario I. Se uno degli angoli ACD, BCD è retto, l'altro lo sarà parimente.

Corollario II. Se la linea DE (Fig. 18) è perpendicolare ad AB, reciprocamente AB sarà perpendicolare a DE.

Poichè dall'esser DE perpendicolare ad AB ne segue che l'angolo ACD è uguale al suo adiacente DCB, e che dessi sono ambedue retti. Ma dall'essere l'angolo ACD un angolo retto ne segue che il suo adiacente ACE è pure un angolo retto; dunque l'angolo ACE=ACD; dunque AB è perpendicolare a DE.

Corollario III. Tutti gli angoli consecutivi BAC (Fig. 34), CAD, DAE, EAF, formati da una medesima parte della retta BF, presi insieme vagliono due angoli retti, perchè la lor somma è eguale a quella dei due angoli adiacenti BAC, CAF.

PROPOSIZIONE III.

*346. Teorema. *Se due angoli hanno un medesimo supplemento, sono eguali fra loro.*

Indichiamo con A uno degli angoli, con B l'altro e con C il loro supplemento. Essendo C il supplemento di A dovrà aversi A+C=2R, rappresentandosi con 2R la somma di due angoli retti. Del pari per essere C il

supplemento di B, sarà B+C=2R. Ma due quantità eguali a una terza sono eguali tra loro (343. 1.°); dunque A+C=B+C. Togliendo ora C da una parte e dall'altra, resta A=B, come voleva provarsi.

PROPOSIZIONE IV.

347. TEOREMA. *Due linee rette, che hanno due punti comuni, coincidono l'una coll'altra in tutta la loro estensione, e non formano che una sola e medesima linea retta.*

Siano (Fig. 19) i due punti comuni A e B: prima di tutto le due linee non ne devono formar che una sola tra A e B, poichè altrimenti vi sarebbero due linee rette da A in B; il che è impossibile (343. 4.°). Supponiamo in seguito che queste linee, essendo prolungate, comincino a separarsi al punto C, l'una divenendo CD, l'altra CE. Conduciamo al punto C la linea CF, che faccia con CA l'angolo retto ACF. Poichè la linea ACD è retta, l'angolo FCD sarà un angolo retto (345): poichè la linea ACE è retta l'angolo FCE sarà parimente un angolo retto. Ma la parte FCE non può essere uguale al tutto FCD: dunque le linee rette, che hanno due punti A e B comuni, non possono separarsi in verun punto del loro prolungamento: dunque esse non formano che una sola e medesima linea retta.

**Scolio.* A rigore la proposizione attuale è una conseguenza immediata della definizione che abbiamo data della linea retta, la quale rende evidente che i due punti pei quali passa una retta, ne determinano la posizione e la distinguono da qualunque altra retta.

PROPOSIZIONE V.

348. TEOREMA. *Se due angoli adiacenti* ACD (Fig. 20), DCB *equivalgono insieme a due angoli retti, i due lati esterni* AC, CB *saranno in linea retta.*

Poichè, se CB non è il prolungamento di AC, sia CE questo prolungamento; allora la linea ACE essendo retta, la somma degli angoli ACD, DCE sarà uguale a due retti (345). Ma per ipotesi, la somma degli angoli ACD, DCB è pure eguale a due retti; dunque ACD+DCB sarebbe uguale ad ACD+DCE: togliendo da ambe le parti l'angolo ACD, resterebbe la parte DCB eguale al tutto DCE; lo che è impossibile. Dunque CB è il prolungamento di AC.

PROPOSIZIONE VI.

349. TEOREMA. *Tutte le volte che due linee rette* AB (Fig. 21), DE *si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono eguali.*

*Infatti la retta AC scendendo comunque sopra la retta BE, l'angolo ACD è il supplemento dell'angolo ACE (345). Parimente, siccome DC scende comunque sulla retta AB, l'angolo ACD è anche il supplemento dell'angolo DCB. Dunque gli angoli ACE, DCB hanno il medesimo supplemento e perciò (346) sono eguali.

Nello stesso modo si dimostra l'eguaglianza degli altri due angoli ACD, ECB.

Scolio. I quattro angoli formati intorno a un punto da due rette, che si tagliano, equivalgono insieme a quattro angoli retti; poichè gli angoli ACE, BCE presi insieme equivalgono a due angoli retti, e gli altri dne ACD, BCD hanno lo stesso valore.

In generale, se quante rette si vogliano CA (Fig. 22), CB, ec. s'incontrano in un punto C, la somma di tutti gli angoli consecutivi ACB, BCD, DCE, ECF, FCA sarà uguale a quattro angoli retti. Poichè, se si formassero al punto C quattro angoli retti col mezzo di due linee perpendiculari tra loro, lo stesso spazio sarebbe occupato tanto da quattro angoli retti, quanto dagli angoli successivi ACB, BCD, ec.

PROPOSIZIONE VII.

350. Teorema. *Due triangoli sono eguali quando hanno un angolo eguale compreso tra lati respettivamente eguali.*

Sia (Fig. 23) l'angolo A uguale all'angolo D, il lato AB eguale a DE, il lato AC eguale a DF; dico che i triangoli ABC, DEF saranno eguali.

Infatti questi triangoli possono esser posti l'uno sull'altro in maniera che dessi coincidano perfettamente. E in primo luogo, se si pone il lato DE sul suo uguale AB, il punto D cadrà in A, e il punto E in B: ma poichè l'angolo D è uguale all'angolo A, subito che il lato DE sarà situato sopra AB, il lato DF prenderà la direzione AC. Di più DF è uguale ad AC; dunque il punto F cadrà in C, e il terzo lato EF coprirà esattamente il terzo lato BC; dunque il triangolo DEF è uguale al triangolo ABC (343. 5.°).

Corollario. Dunque dall'essere eguali tre cose in due triangoli, cioè l'angolo A=D, il lato AB=DE, il lato AC=DF, si può conchiudere che le altre tre lo son pure, cioè, l'angolo B=E, l'angolo C=F, e il lato BC=EF.

PROPOSIZIONE VIII.

351. Teorema. *Due triangoli sono eguali quando hanno un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente uguali.*

Sia (Fig. 23) il lato BC uguale al lato EF, l'angolo B uguale all'angolo E, e l'angolo C all'angolo F; dico che il triangolo DEF sarà eguale al triangolo ABC.

Poichè, per eseguire la soprapposizione, sia situato EF sul suo eguale BC; il punto E cadrà in B, e il punto F in C. Poichè l'angolo E è eguale all'angolo B, il lato ED prenderà la direzione di BA, onde il punto D si troverà su qualche punto della linea BA. Parimente, poichè l'angolo F è eguale all'angolo C, la linea FD prenderà la direzione di CA, e il punto D si troverà su qualche punto del lato CA; dunque il punto D, che dee trovarsi a un tempo stesso sulle dne linee BA, CA, cadrà sulla loro unica intersezio-

ne A; dunque i due triangoli ABC, DEF coincidono l'uno coll'altro, e sono perfettamente eguali.

Corollario. Dunque dall'essere eguali tre cose in due triangoli; cioè, $BC=EF$, $B=E$, $C=F$, si può conchiudere che le altre tre son pure eguali, cioè, $AB=DE$, $AC=DF$, $A=D$.

PROPOSIZIONE IX.

352. Teorema. *In un triangolo un lato qualunque è minore della somma degli altri due.*

Imperocchè la linea retta BC (Fig. 23), per esempio, è il più corto cammino da B in C (341. III); dunque BC è minore di $BA+AC$.

PROPOSIZIONE X.

353. Teorema. *Se da un punto* O (Fig. 24) *preso dentro il triangolo* ABC *si conducono alle estremità d'un lato* BC *le linee rette* OB, OC, *la somma di queste rette sarà minore di quella degli altri due lati* AB, AC.

Sia prolungata BO fino all'incontro del lato AC in D; la linea retta OC è più corta che $OD+DC$ (352); aggiungendo da ambe le parti BO, si avrà $BO+OC<BO+OD+DC$; ovvero $BO+OC<BD+DC$.

Si ha parimente $BD<BA+AD$; aggiungendo da ambe le parti DC, si avrà $BD+DC<BA+AC$. Ma avevamo trovato $BO+OC<BD+DC$, dunque con maggior ragione $BO+OC<BA+AC$.

PROPOSIZIONE XI.

354. Teorema. *Se i due lati* AB, AC *del triangolo* ABC (Fig. 25) *sono eguali respettivamente ai due lati* DE, DF *del triangolo* DEF, *e se nel tempo stesso l'angolo* BAC *compreso da' primi è maggiore dell'angolo* EDF *compreso dai secondi, dico che il terzo lato* BC *del primo triangolo sarà maggiore del terzo* EF *del secondo.*

Fate l'angolo $CAG=D$, prendete $AG=DE$, e tirate CG; il triangolo GAC sarà uguale al triangolo DEF, giacchè questi triangoli hanno, per costruzione, un angolo uguale compreso tra lati uguali (350); si avrà dunque $CG=EF$. Ora possono darsi tre casi secondochè il punto G cade fuori del triangolo ABC, o sul lato BC, o dentro dello stesso triangolo.

Primo caso. La linea retta GC (Fig. 25) è più corta di $GI+IC$; la linea retta AB è più corta di $AI+IB$; dunque $GC+AB$ è minore di $GI+AI+IC+IB$, ovvero, ciò che torna lo stesso, $GC+AB<AG+BC$. Togliendo da una parte AB, e dall'altra la sua uguale AG, resterà $GC<BC$; ma $GC=EF$; dunque avremo $EF<BC$.

Secondo caso. Se il punto G (Fig. 26) cade sul lato BC, è chiaro che GC, o la sua uguale EF sarà minore di BC.

Terzo caso. Finalmente se il punto G (Fig. 27) cade dentro del triangolo

ABC, si avrà seguendo il Teorema precedente, AG+GC<AB+BC. Togliendo da una parte AG, e dall'altra la sua uguale AB, resterà GC<BC, o EF<BC.

Scolio. Reciprocamente, se i due lati AB, AC del triangolo ABC sono eguali ai due lati DE, DF del triangolo DEF, e se di più il terzo lato CB del primo triangolo è maggiore del terzo EF del secondo, dico che l'angolo BAC del primo triangolo sarà maggiore dell'angolo EDF del secondo.

Poichè, se si neghi questa Proposizione, bisognerà che l'angolo BAC sia eguale a EDF, o che sia minore di EDF: nel primo caso il lato CB sarebbe eguale a EF (350): nel secondo CB sarebbe minore di EF: ora l'uno e l'altro son contrarj alla supposizione: dunque BAC è maggiore di EDF.

PROPOSIZIONE XII.

355. Teorema. *Due triangoli sono eguali allorchè hanno i tre lati respettivamente eguali.*

Sia (Fig. 23) il lato AB=DE, AC=DF, BC=EF; dico che avremo l'angolo A=D, B=E, C=F.

Poichè, se l'angolo A fosse maggiore dell'angolo D, siccome i lati AB, AC sono respettivamente uguali ai lati DE, DF, ne seguirebbe per il Teorema precedente che il lato BC sarebbe maggiore di EF; e se l'angolo A fosse minore di D, ne seguirebbe che il lato BC sarebbe minore di EF. Ora BC è eguale ad EF; dunque l'angolo A non può essere nè maggiore nè minore dell'angolo D: dunque gli è uguale. Si proverà nello stesso modo che l'angolo B=E, e l'angolo C=F.

Scolio. Si può osservare che gli angoli eguali sono opposti a de'lati uguali. Così gli angoli uguali A e D sono opposti ai lati uguali BC, EF.

PROPOSIZIONE XIII.

356. Teorema. *In un triangolo isoscele gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali.*

Sia (Fig. 28) il lato AB=AC; dico che sarà l'angolo C=B.

Tirate la linea AD dal *vertice* A al punto D, in mezzo della *base* BC; i due triangoli ABD, ADC avranno i loro tre lati respettivamente eguali, cioè, AD comune, AB=AC per ipotesi, e BD=DC per costruzione; dunque, in virtù del Teorema precedente, l'angolo B è uguale all'angolo C.

Corollario. Un triangolo equilatero è nel medesimo tempo *equiangolo*, cioè ha tutti i suoi angoli uguali.

Scolio. L'uguaglianza de' triangoli ABD, ACD prova nel tempo stesso che l'angolo BAD=DAC, e che l'angolo BDA=ADC; dunque questi due ultimi sono retti: dunque *la linea condotta dal vertice d'un triangolo isoscele al punto di mezzo della sua base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.*

In un triangolo non isoscele si prende indifferentemente per *base* un lato

qualunque, ed allora il suo *vertice* è quello dell'angolo opposto. Nel triangolo isoscele si prende particolarmente per *base* il lato, che non è uguale ad uno degli altri due.

PROPOSIZIONE XIV.

357. Teorema. *Reciprocamente, se due angoli sono eguali in un triangolo, i lati opposti saranno eguali, e il triangolo sarà isoscele.*

Sia (Fig. 29) l'angolo ABC=ACB; dico che il lato AC sarà eguale al lato AB.

Poichè se questi lati non sono eguali, sia AB il maggiore de'due. Prendete BD=AC, e tirate DC. L'angolo DBC è, per ipotesi, eguale all'angolo ACB; i due lati DB, BC sono eguali ai due AC, CB; dunque il triangolo DBC (350) sarebbe eguale al triangolo ACB: ma la parte non può essere eguale al tutto: dunque non vi è ineguaglianza tra i lati AB, AC; dunque il triangolo ABC è isoscele.

PROPOSIZIONE XV.

358. Teorema. *Di due lati d'un triangolo il maggiore è quello, che è opposto od un angolo maggiore; e reciprocamente di due angoli d'un triangolo il maggiore è quello, che è opposto ad un lato maggiore.*

1.° Sia (Fig. 30) l'angolo C>B; dico che il lato AB opposto all'angolo C è maggiore del lato AC opposto all'angolo B.

Sia fatto l'angolo BCD=B; nel triangolo BDC si avrà (357) BD=DC. Ma la linea retta AC è più corta di AD+DC, e AD+DC=AD+DB=AB; dunque AB è maggiore di AC.

2.° Sia il lato AB>AC; dico che l'angolo C opposto al lato AB sarà maggiore dell'angolo B opposto al lato AC.

Poichè, se si avesse C<B, ne seguirebbe da ciò, che si è dimostrato, AB<AC, il che è contro della supposizione. Se poi fosse C=B, ne seguirebbe (*ivi*) AB=AC, il che è pure contro della supposizione. Dunque bisogna che l'angolo C sia maggiore di B.

PROPOSIZIONE XVI.

359. Teorema. *Da un punto dato* A (Fig. 31) *fuori d'una retta* DE *non si può condurre che una sola perpendicolare a questa retta.*

Poichè supponiamo che se ne possano condurre due AB e AC; prolunghiamo una di esse AB d'una lunghezza BF=AB, e tiriamo FC.

Il triangolo CBF è uguale al triangolo ABC, poichè l'angolo CBF è retto, come pure CBA, il lato CB è comune, e il lato BF=AB. Dunque questi triangoli sono eguali (350), e ne segue che l'angolo BCF=BCA. L'angolo BCA è retto, per ipotesi; dunque l'angolo BCF lo è pure. Ma se gli angoli adiacenti BCA, BCF equivalgono insieme a due angoli retti, bisogna che la linea ACF

sia retta (348), donde resulta che fra i due medesimi punti A e F si potrebbero condurre due linee rette ABF, ACF, il che è impossibile (343. 4.°); dunque è parimente impossibile che da un medesimo punto sian condotte due perpendicolari sulla medesima linea retta.

Scolio. Da un medesimo punto C (Fig. 17) dato sopra la linea AB è egualmente impossibile di condurre due perpendicolari a questa linea; perchè se CD e CE fossero queste due perpendicolari, l'angolo DCB sarebbe retto, come pure BCE, e la parte sarebbe eguale al tutto.

PROPOSIZIONE XVII.

360. Teorema. *Se da un punto* A (Fig. 31) *situato fuori d' una retta* DE *si conducono la perpendicolare* AB *su questa retta, e differenti oblique* AE, AC, AD, ec. *a differenti punti della medesima retta:* 1.° *La perpendicolare* AB *sarà più corta d' ogni obliqua:* 2.° *Le due oblique* AC, AE, *condotte da una parte e dall' altra della perpendicolare a distanze eguali* BC, BE, *saranno eguali:* 3.° *Di due oblique* AC e AD, o AE ed AD, *condotte come si vorrà, quella che si allontani di più dalla perpendicolare, sarà la più lunga.*

Prolungate la perperdicolare AB d' una lunghezza BF=AB, ed unite FC, FD.

1.° Il triangolo BCF è uguale al triangolo BCA, perchè l' angolo retto CBF=CBA, il lato CB è comune, e il lato BF=BA; dunque (350) il terzo lato CF è eguale al terzo AC. Ora ABF linea retta è più corta di ACF, linea spezzata; dunque AB metà di ABF è più corta di AC metà di ACF; dunque 1.° la perpendicolare è più corta d' ogni obliqua.

2.° Se si suppone BE=BC, siccome si hanno inoltre AB comune, e l' angolo ABE=ABC, ne segue che il triangolo ABE è eguale al triangolo ABC; dunque i lati AE, AC sono eguali; dunque 2.° due oblique, che si allontanano egualmente dalla perpendicolare, sono eguali.

3.° Nel triangolo DFA la somma delle linee AC, CF è minore (353) della somma de' lati AD, DF; dunque AC, metà della linea ACF, è minore di AD, metà di ADF; dunque 3.° le oblique, che si allontanan di più dalla perpendicolare, son le più lunghe.

Corollario I. La perpendicolare misura la vera distanza da un punto ad una retta, poichè dessa è più corta d' ogni obliqua.

II. Da un medesimo punto non si possono condurre a una medesima retta tre rette eguali; poichè se ciò fosse, vi sarebbero da una medesima parte della perpendicolare due oblique eguali; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XVIII.

361. Teorema. *Se dal punto* C (Fig. 32), *in mezzo della retta* AB, *si alza la perpendicolare* EF *su questa retta:* 1.° *ogni punto della perpendicolare sarà egualmente distante dalle due estremità della linea* AB; 2.° *ogni punto situato*

fuori della perpendicolare sarà disugualmente distante dalle medesime estremità A *e* B.

Imperocchè, 1.° siccome si suppone AC=CB, le due oblique AD, DB s'allontanano egualmente dalla perpendicolare; desse dunque son eguali. Lo stesso accade delle due oblique AE, EB, delle due AF, FB ec.: dunque 1.° ogni punto della perpendicolare è egualmente distante dalle estremità A e B.

2.° Sia I un punto fuori della perpendicolare; se si tirano IA, IB, una di queste linee taglierà la perpendicolare in D, d'onde tirando DB si avrà DB=DA. Ma la linea retta IB è più corta che la linea spezzata ID+DB e ID+DB=ID+DA=IA; dunque IB<IA; dunque 2.° ogni punto fuori della perpendicolare è disugualmente distante dalle estremità A e B.

PROPOSIZIONE XIX.

262. Teorema. *Due triangoli rettangoli sono eguali quando hanno le ipotenuse eguali e un lato eguale.*

Sia (Fig. 33) l'ipotenusa AC=DF, e il lato AB=DE; dico che il triangolo rettangolo ABC sarà eguale al triangolo rettangolo DEF.

L'eguaglianza sarebbe manifesta se il terzo lato BC fosse eguale al terzo EF. Supponiamo, s'è possibile, che questi lati non siano uguali, e che BC sia il maggiore. Prendete BG=EF e tirate AG. Il triangolo ABG, è eguale al triangolo DEF, perchè l'angolo retto B è eguale all'angolo retto E, il lato AB=DE e il lato BG=EF; dunque questi due triangoli sono uguali (350), e si ha per conseguenza AG=DF: ma per l'ipotesi, DF=AC; dunque AG=AC. Ma l'obliqua AC non può essere eguale ad AG (360), giacchè è più lontana dalla perpendicolare AB; dunque è impossibile che BC differisca da EF: dunque il triangolo ABC è eguale al triangolo DEF.

PROPOSIZIONE XX.

363. Teorema. *Se due linee rette* AC (Fig. 35), BD *son perpendicolari a una terza* AB, *queste due linee saranno parallele, vale a dire non si potranno incontrare a qualunque distanza che si prolunghino.*

Perchè, se desse potessero incontrarsi in un punto O, da un lato o dall'altro della linea AB, esisterebbero due perpendicolari OA, OB abbassate da un medesimo punto O sopra una medesima retta AB; ciò che è impossibile (359).

PROPOSIZIONE XXI.

364. Lemma. *La retta* BD (Fig. 35) *essendo perpendicolare ad* AB, *se un'altra retta* AE *fa con* AB *l'angolo acuto* BAE, *dico che le rette* BD, AE *prolungate sufficientemente s'incontreranno.*

Condotta AC perpendicolare ad AB, si formino gli angoli EA*a*, *a*A*b*, *b*A*c* ec., ciascuno dei quali sia eguale a CAE. Per quanto sia piccolo l'angolo CAE, è chiaro che con la riunione ad esso degli angoli EA*a*, *a*A*b* ec., si giun-

gerà a formare un angolo CA*d* maggiore dell'angolo retto CAB. Supposte tutte le rette della Figura prolungate indefinitamente, ciascuno degli angoli CAE, EA*a* ec., comprenderà una egual porzione dello spazio indefinito intercetto dall'angolo CA*d*, e perciò lo spazio compreso nell'angolo CAE sarà una parte definita dello spazio terminato dall'angolo ottuso CA*d*, per esempio, la centesima, se il numero degli angoli CAE, EA*a*, *a*A*b* ec. è cento.

Adesso prendendo sulla retta AB prolungata le porzioni BF, FG ec., eguali ad AB, alziamo a loro nei punti F, G ec. le perpendicolari indefinite FF', GG' ec., ed otterremo le striscie eguali CABD, DBFF', F'FGG' ec. Infatti, se la prima striscia si faccia girare sopra la retta BD, perchè, ferma stante questa retta, si sovrapponga alla seconda striscia, è evidente che il punto A cadrà sul punto F a motivo di AB eguale a BF, e degli angoli ABD, FBD parimente eguali perchè retti, e la perpendicolare AC cadrà interamente sulla perpendicolare FF' per lo stesso motivo degli angoli retti BAC, BFF'; laonde le due striscie CABD, DBFF' si combaceranno esattamente. Ciascuna di esse occuperà una egual porzione nello spazio indefinito terminato dai lati dell'angolo retto CAG; ma per quanto si accresca il lor numero, e nel caso nostro molto al di là di cento, esse riunite insieme non giungeranno mai a riempir quello spazio, e molto meno lo spazio compreso tra i due lati dell'angolo ottuso CA*d*.

Da ciò segue che lo spazio compreso tra i lati dell'angolo CAE è maggiore dello spazio occupato dalla striscia CABD. Ora, se la retta AE non incontrasse mai la BD, il primo spazio sarebbe evidentemente minore del secondo. È dunque necessario che queste due rette s'incontrino.

PROPOSIZIONE XXII.

365. Teorema. *Se due rette* AC, BD (Fig. 36) *fanno con una terza* AB *due angoli interni* CAB, ABD, *la di cui somma sia eguale a due retti, le due linee* AC, BD *saranno parallele.*

Dal punto G in mezzo di AB conducete la retta EGF perpendicolare ad AC: dico che questa medesima retta sarà perpendicolare a BD. Infatti la somma degli angoli GAE+GBD è eguale, per ipotesi, a due retti e quindi GBD è il supplemento di GAE; ma anche GBF ha per supplemento lo stesso angolo GBD (345); dunque i due angoli GAE, GBF sono eguali (346). D'altronde gli angoli AGE, BGF sono eguali come opposti al vertice; dunque i triangoli AGE, BGF hanno un lato eguale adiacente a due angoli eguali. Dessi dunque sono eguali (351); dunque l'angolo BFG=AEG: ma l'angolo AEG è retto per costruzione; dunque le rette AC, BD son perpendicolari ad una medesima retta EF; esse dunque son parallele (363).

PROPOSIZIONE XXIII.

366. Teorema. *Se due linee rette* AI, BD (Fig. 36) *fanno con una terza* AB *due angoli interni* BAI, ABD, *la di cui somma sia minore di due angoli retti, le linee* AI, BD *prolungate s' incontreranno.*

Conducete AC di maniera che l'angolo CAB sia eguale ad ABF, valé a dire in modo che i due angoli CAB, ABD presi insieme facciano due angoli retti, e terminate il resto della costruzione come nel Teorema precedente. Poichè l'angolo AEK è retto, AE è una perpendicolare più corta dell'obliqua AK; dunque nel triangolo AEK (358) l'angolo AKE opposto al lato AE è minore dell'angolo retto AEK opposto al lato AK; dunque l'angolo IKF eguale ad AKE è minore d'un retto; dunque le linee KI, FD prolungate debbono incontrarsi (364).

Scolio. Se le linee AM e BD facessero con AB due angoli BAM, ABD, la di cui somma fosse maggiore di due angoli retti, allora le due linee AM, BD non s' incontrerebbero al disopra di AB, ma s' incontrerebbero al disotto. Poichè i due angoli BAM, BAN equivalgono a due retti, come pure i due angoli ABD, ABF; dunque questi quattro angoli presi insieme equivalgono a quattro angoli retti. Ma la somma de'due angoli BAM, ABD equivale a più di due retti; dunque la somma de'due rimanenti BAN, ABF è minore di due retti; dunque le due rette AN, BF prolungate debbono incontrarsi.

Corollario. Per un punto dato A non si può condurre che una sola retta parallela alla linea data BD; perchè non vi è che una retta AC, che faccia la somma dei due angoli BAC+ABD eguale a due angoli retti; questa è la parallela dimandata: qualùnque altra retta AI o AM farebbe la somma degli angoli interni minore o maggiore di due angoli retti; essa dunque incontrerebbe la linea BD.

PROPOSIZIONE XXIV.

367. Teorema. *Se due linee parallele* AB, CD (Fig. 37) *sono incontrate da una secante* EF, *la somma degli angoli interni* AGO, GOC *sarà eguale a due angoli retti.*

Poichè, se dessa fosse maggiore o minore, le due linee AB, CD s' incontrerebbero da una parte, o dall' altra (366), e non sarebbero parallele.

Corollario I. Se l'angolo GOC è retto, l'angolo AGO dev'esserlo pure: dunque ogni linea retta perpendicolare a una delle parallele è perpendicolare anco all'altra.

II. Poichè la somma AGO+GOC è due retti, ne segue che GOC è il supplemento di AGO. Ma COG è il supplemento anche di COF; dunque (346) AGO=COF. Dall'altra parte AGO=BGE e GOD=COF; dunque i quattro angoli acuti AGO, BGE, GOD, COF sono eguali fra loro: accade lo stesso de'quattro angoli ottusi AGE, BGO, GOC, DOF. Si può osservare di più che,

sommando uno de' quattro angoli acuti con uno de' quattro ottusi, la somma sarà sempre eguale a due angoli retti.

Scolio. Gli angoli de' quali abbiamo parlato, paragonati due a due, prendono differenti nomi. Abbiamo già chiamato gli angoli AGO, GOC *interni da una medesima parte;* gli angoli BGO, GOD hanno il medesimo nome, gli angoli AGO, GOD si chiamano *alterni-interni,* o semplicemente *alterni;* e così pure gli angoli BGO, GOC. Finalmente si chiamano *corrispondenti* gli angoli EGB, GOD, oppure EGA, GOC, ed *alterni-esterni* gli angoli EGB, COF, ovvero AGE, DOF. Ciò posto, si possono riguardare le seguenti Proposizioni come già dimostrate.

1.ª Gli angoli interni da una medesima parte presi insieme equivalgono a due angoli retti, ossia sono supplementari l'uno dell'altro.

2.ª Gli angoli alterni-interni sono eguali; come pure gli angoli corrispondenti, e gli angoli alterni-esterni.

Reciprocamente, se in questo secondo caso due angoli del medesimo nome sono eguali, si può conchiudere che le linee, alle quali si rapportano, son parallele. Sia per esempio, l'angolo AGO=GOD; poichè GOC+GOD è eguale a due retti, si avrà pure AGO+GOC eguale a due retti; dunque (365) le linee AG, CO son parallele.

PROPOSIZIONE XXV.

368. Teorema. *Due linee* AB, CD (Fig. 38) *parallele a una terza* EF *sono parallele fra loro.*

Conducete la secante PQR perpendicolare ad EF. Poichè AB è parallela ad EF, la secante PR sarà perpendicolare ad AB (367); parimente poichè CD è parallela ad EF, la secante PR sarà perpendicolare a CD; dunque AB e CA sono perpendicolari alla medesima linea PQ; dunque son parallele (363).

PROPOSIZIONE XXVI.

369. Teorema. *Due parallele sono per tutto egualmente distanti.*

Essendo date (Fig. 39) le due parallele AB, CD, se da due punti presi a piacere s'inalzino sopra AB le due perpendicolari EG, FH, le rette EG, FH saranno nel medesimo tempo perpendicolari a CD (367): inoltre dico che queste rette saranno eguali tra loro.

Poichè, tirando GF, gli angoli GFE, FGH, considerati per rapporto alle parallele AB, CD, saranno eguali come alterni-interni; parimente, poichè le rette EG, FH sono perpendicolari ad una medesima retta AB, ed in conseguenza parallele tra loro, gli angoli EGF, GFH, considerati per rapporto alle parallele GE, FH, saranno eguali come alterni-interni: dunque i due triangoli EFG, FGH hanno un lato comune FG adiacente a due angoli respettivamente eguali; dunque questi due triangoli sono eguali; dunque il lato EG, che misura la distanza delle parallele AB, CD nel punto E, è eguale al lato FH, che misura la distanza di queste medesime parallele nel punto F.

PROPOSIZIONE XXVII.

370. Teorema. *Se due angoli* BAC (Fig. 40) DEF *hanno i lati respettivamente paralleli, e diretti nel medesimo senso, questi due angoli saranno eguali.*

Prolungate, s'è necessario, DE finchè incontri AC in G; l'angolo DEF è eguale a DGC, perchè EF è parallela a GC (367); l'angolo DGC è eguale a BAC, perchè DG è parallela ad AB; dunque l'angolo DEF è eguale a BAC.

Scolio. Si pone in questa Proposizione la restrizione che il lato EF sia diretto nel medesimo senso di AC, ed ED nel medesimo senso di AB; la ragione di ciò è che, se si prolunga EF verso H, l'angolo DEH avrà i suoi lati paralleli a quelli dell'angolo BAC, ma questo non gli sarebbe eguale. In tal caso l'angolo DEH e l'angolo BAC farebbero insieme due angoli retti.

Se poi i lati dei due angoli fossero ambedue diretti in senso contrario, gli angoli sarebbero nuovamente eguali. Dunque in generale due angoli aventi i lati paralleli o sono eguali, o sono supplementari l'uno dell'altro.

PROPOSIZIONE XXVIII.

371. Teorema. *In qualunque triangolo la somma dei tre angoli è eguale a due angoli retti.*

Sia (Fig. 41) ABC un triangolo qualunque; prolungate il lato CA verso D, e conducete pel punto A la retta AE parallela a BC.

A motivo delle parallele AE, CB, gli angoli ACB, DAE, considerati per rapporto alla secante CAD, saranno eguali come corrispondenti; parimente gli angoli ABC, BAE, considerati per rapporto alla secante AB, saranno eguali come alterni-interni: dunque i tre angoli del triangolo ABC fanno la medesima somma che i tre angoli CAB, BAE, EAD, dunque questa somma è eguale a due angoli retti.

Corollario I. Due angoli d'un triangolo essendo dati o solamente la loro somma, si conoscerà il terzo togliendo la somma di quei due angoli da due angoli retti.

II. Se due angoli d'un triangolo sono eguali respettivamente a due angoli d'un altro triangolo, il terzo angolo dell'uno sarà eguale al terzo dell'altro, e i due triangoli saranno equiangoli tra di loro.

III In un triangolo non può esservi che un solo angolo retto; poichè, se ve ne fossero due il terzo diverrebbe nullo: a più forte ragione un triangolo non può avere che un solo angolo ottuso.

IV. In un triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è eguale ad un retto.

V. Qualunque triangolo equilatero dovendo essere equiangolo (256), ciascuno de' suoi angoli sarà eguale ad un terzo di due angoli retti; di maniera che, se l'angolo retto è espresso dall'unità, l'angolo del triangolo equilatero sarà espresso da 2/3.

VI. In qualunque triangolo BAC l'angolo esterno BAD è eguale alla somma dei due interni opposti B e C; poichè AE essendo parallela a BC, la parte BAE è eguale all' angolo B, e l' altra parte DAE è eguale all' angolo C.

PROPOSIZIONE XXIX.

372. Teorema. *La somma di tutti gli angoli interni d'un Poligono è eguale a tante volte due angoli retti quante unità vi sono nel numero dei suoi lati meno due.*

Sia (Fig. 42) ABCDEF ec. il Poligono proposto. Se dal vertice d' un medesimo angolo A si conducano a tutti i vertici degli angoli opposti le diagonali AC, AD, AE ec., è facile il vedere che il Poligono resterà diviso in cinque triangoli, avendo sette lati; in sei triangoli, avendo otto lati; e in generale in tanti triangoli quanti lati ha il Poligono meno due; perchè questi triangoli posson essere considerati come aventi per vertice comune il punto A, e per basi i differenti lati del Poligono, eccettuati i due soli, che formano l' angolo A. Si vede nel medesimo tempo che la somma degli angoli di tutti questi triangoli non differisce punto dalla somma degli angoli del Poligono. Dunque quest' ultima somma è eguale a tante volte due angoli retti quanti sono i triangoli, e vale a dire quante unità vi sono nel numero dei lati del Poligono meno due.

**Scolio.* Indicando con n il numero dei lati di un poligono e prendendo per unità l' angolo retto, la somma S degli angoli sarà data dalla formula $S=2(n-2)$.

Corollario I. La somma degli angoli d' un quadrilatero è eguale a due angoli retti moltiplicati per $4-2$; ciò che fa quattro angoli retti; dunque, se tutti gli angoli d' un quadrilatero sono eguali, ciascuno di loro sarà un angolo retto; lo che giustifica la Definizione XVII, ove si è presupposto che i quattro angoli d' un quadrilatero son retti nel caso sì del rettangolo che del quadrato.

II. La somma degli angoli d'un pentagono è eguale a due angoli retti moltiplicati per $5-2$; il che fa 6 angoli retti; dunque, allorchè un pentagono sia *equiangolo*, ciascun angolo è eguale al quinto di sei angoli retti, ovvero ai 6/5 d' un angolo retto.

III. La somma degli angoli d' un esagono è di $2\times(6-2)$, ovvero di 8 angoli retti; dunque nell'esagono *equiangolo* ciascun angolo è il sesto di 8 angoli retti, ovvero i 4/3 d' un angolo retto; e così di seguito.

Scolio. Se si volesse applicare (Fig. 43) questa Proposizione ai Poligoni, che hanno degli angoli *rientranti*, bisognerebbe considerare ciascun angolo *rientrante* come essendo più grande di due angoli retti. Ma a scanso d' ogni imbarazzo, non considereremo qui ed in appresso, se non che i Poligoni ad angoli *salienti*, che si posson chiamare ancora *Poligoni convessi*. Ogni Poligono convesso è tale che una linea retta, condotta come si vorrà, non può mai incontrare il contorno di questo Poligono se non che in due punti.

PROPOSIZIONE XXX.

373. Teorema. *I lati opposti d'un parallelogrammo sono eguali e così pure gli angoli opposti.*

Tirate (Fig. 44) la diagonale BD; i due triangoli ADB, DBC hanno il lato comune BD; di più a cagione delle parallele AD, BC, l'angolo ADB=DBC (367), ed a cagione delle parallele AB, CD l'angolo ABD=BDC; dunque i due triangoli ABD, DBC sono eguali (351); dunque il lato AB opposto all'angolo ADB è eguale al lato DC opposto all'angolo eguale DBC, e parimente il terzo lato AD è eguale al terzo BC; dunque i lati opposti d'un parallelogrammo sono eguali.

In secondo luogo dall'eguaglianza de'medesimi triangoli ne segue che l'angolo A è eguale all'angolo C, e similmente che l'angolo ADC, composto dei due angoli ADB, BDC, è eguale all'angolo ABC, composto de'due angoli BDC, ABD; dunque gli angoli opposti d'un parallelogrammo sono eguali.

Corollario. Dunque due parallele AB, CD comprese fra due altre parallele AD, BC sono eguali.

PROPOSIZIONE XXXI.

374. Teorema. *Se in un quadrilatero* ABCD (Fig. 44) *i lati opposti sono eguali, talmente che sia* AB=CD, e AD=BC, *i lati eguali saronno paralleli, e la Figura sarà un parallelogrammo.*

Poichè, tirando la diagonale BD. i due triangoli ABD, BDC avranno i tre lati respettivamente eguali: dunque saranno eguali; dunque l'angolo ADB opposto al lato AB è eguale all'angolo DBC opposto al lato CD; dunque (367) il lato AD è parallelo a BC. Per una simil ragione AB è parallelo a CD; dunque il quadrilatero ABCD è un parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXXII.

375. Teorema. *Se i due lati opposti* AB (Fig. 44), CD *d'un quadrilatero sono eguali e paralleli, gli altri due lati saranno parimente eguali e paralleli, e la Figura* ABCD *sarà un parallelogrammo.*

Sia tirata la diagonale BD. Poichè AB è parallelo a CD, gli angoli alterni ABD, BDC sono eguali: d'altronde il lato AB=DC, il lato DB è comune; dunque il triangolo ABD è eguale al triangolo BDC (350); dunque il lato AD=BC, l'angolo ADB=DBC, ed in conseguenza AD è parallelo a BC; dunque la Figura ABCD è un parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XXXIII.

376. Teorema. *Le due diagonali* AC (Fig. 45) BD *d'un parallelogrammo si tagliano scambievolmente in due parti eguali.*

Poichè paragonando il triangolo ADO al triangolo COB si trova il lato AD=CB, l'angolo ADO=CBO e l'angolo DAO=OCB; dunque questi due triangoli sono eguali (351); dunque AO, lato opposto all'angolo ADO è eguale ad OC, lato opposto all'angolo OBC; dunque ancora DO=OB.

Scolio. Nel caso della *losanga* i lati AB, BC essendo eguali, i triangoli AOB, OBC hanno i tre lati rispettivamente eguali, e sono per conseguenza eguali; d'onde segue che l'angolo AOB=BOC, come pure che le due diagonali di una *losanga* si tagliano scambievolmente ad angoli retti.

LIBRO SECONDO.

IL CIRCOLO E LA MISURA DEGLI ANGOLI.

377. Definizioni. i. La *circonferenza del circolo* (Fig. 46) è una linea curva, di cui tutti i punti sono egualmente distanti da un punto interno, che chiamasi *centro*. Il *circolo* è lo spazio compreso da questa linea curva.

'La circonferenza vien descritta dall'estremità di una retta che gira sopra una superficie piana intorno all'altra estremità mantenuta costantemente fissa.

Talvolta nel discorso si confonde il circolo colla sua circonferenza; ma sarà sempre facile ristabilire l'esattezza delle espressioni ricordandosi che il circolo è una superficie, che ha lunghezza e larghezza, mentre la circonferenza non è che una linea.

ii. Ogni linea retta CA, CE, CD ec. condotta dal centro alla circonferenza si chiama *raggio*, o *semi-diametro*. Ogni retta, come AB, che passa pel centro, e ch'è terminata da ambe le parti alla circonferenza, si chiama *diametro*.

In virtù della definizione del circolo tutti i raggi sono ugoali, tutti i diametri son pure eguali, e doppj del raggio.

iii. Si chiama *arco* una porzione di circonferenza, come FHG. La *corda* o *sottesa* dell'arco è la linea retta FG, che unisce le sue due estremità.

iv. *Segmento* è la superficie o porzione di circolo compresa fra l'arco e la corda. Alla medesima corda FG corrispondono sempre due archi FHG, FEG, e per conseguenza anche due segmenti; ma s'intende sempre di parlar del minore, salvo che non si esprima il contrario.

v. *Settore* è la parte del circolo compresa fra un arco DE, o i due raggi CD, CE condotti alle estremità del medesimo arco.

vi. Si chiama *linea iscritta nel circolo* quella, le cui estremità sono alla circonferenza, come AB (Fig. 47). *Angolo iscritto* un angolo, come BAC, il di cui vertice è alla circonferenza, e che è formato da due corde. *Triangolo iscritto* un triangolo come BAC, i cui tre angoli hanno i loro vertici alla circonferenza. Ed in generale *Figura iscritta* quella, di cui tutti gli angoli hanno i

loro vertici alla circonferenza: nel tempo stesso si dice che il circolo è *circoscritto* a questa Figura.

VII. Si chiama *secante* una linea, che incontra la circonferenza in due punti: tale è AB (Fig. 48).

VIII. *Tangente* è una linea, che non ha che un sol punto di comune colla circonferenza; tale è CD. Il punto comune M si chiama *punto di contatto.*

IX. Parimente due circonferenze sono *tangenti* l'una dell'altra, allorchè esse non hanno che un sol punto di comune.

X. Un poligono è *circoscritto ad un circolo* quando tutti i suoi lati sono *tangenti* della circonferenza (Fig. 160); nello stesso caso si dice che il circolo è *iscritto* nel poligono.

PROPOSIZIONE I.

378. TEOREMA. *Ogni diametro* AB (Fig. 49) *divide il circolo e la sua circonferenza in due parti eguali.*

Poichè se si applica la figura AEB sopra AFB conservando la base comune AB, bisognerà che la linea curva AEB cada esattamente sulla linea curva AFB; altrimenti si avrebbero nell'una o nell'altra dei punti disugualmente lontani dal centro; il che è contra la definizione del circolo.

PROPOSIZIONE II.

379. TEOREMA. *Ogni corda è minor del diametro.*

Perocchè, se alle estremità della corda AD (Fig. 49) conducônsi i raggi AC, CD, si avrà la retta $AD < AC + CD$, o $AD < AB$.

PROPOSIZIONE III.

380. TEOREMA. *Una linea retta non può incontrare una circonferenza in più di due punti.*

Poichè, se l'incontrasse in tre, questi tre punti sarebbero egualmente distanti dal centro; vi sarebbero dunque tre rette eguali condotte da uno stesso punto sopra una medesima linea retta; lo che è impossibile (360).

PROPOSIZIONE IV.

381. TEOREMA. *In un medesimo circolo, o in circoli eguali, gli archi eguali sono sottesi da corde eguali, e reciprocamente le corde eguali sottendono archi eguali.*

Essendo il raggio AC (Fig. 50) eguale al raggio EO, e l'arco AMD eguale all'arco ENG, dico che la corda AD sarà eguale alla corda EG.

Poichè, essendo il diametro AB eguale al diametro EF, il mezzo-circolo AMDB potrà applicarsi esattamente sul mezzo-circolo ENGF, e la linea curva AMDB coinciderà esattamente colla linea curva ENGF. Ma si suppone la parte

AMD eguale alla parte ENG; dunque il punto D cadrà sul punto G; dunque la corda AD è eguale alla corda EG.

Reciprocamente, supponendo sempre il raggio AC=EO, se la corda AD=EG, dico che l'arco AMD sarà eguale all'arco ENG.

Poichè, tirando i raggi CD, OG, i due triangoli ACD, EOG avranno i tre lati respettivamente eguali; cioè AC=EO, CD=OG e AD=EG; dunque questi triangoli sono eguali (355); dunque l'angolo ACD=EOG. Ma ponendo il mezzo circolo ADB sul suo eguale EGF, poichè l'angolo ACD=EOG, è chiaro che il raggio CD cadrà sul raggio OG, e il punto D sul punto G; dunque l'arco AMD è eguale all'arco ENG.

PROPOSIZIONE V.

382. Teorema. *Nel medesimo circolo, o in circoli eguali, un arco maggiore è sotteso da una corda maggiore, e reciprocamente, purchè gli archi, di cui si tratta, siano minori d'una mezza-circonferenza.*

Poichè sia (Fig. 50) l'arco AH maggiore di AD, e siano condotte le corde AD, AH, ed i raggi CD, CH: i due lati AC, CH del triangolo ACH sono eguali ai due lati AC, CD del triangolo ACD; l'angolo ACH è maggiore di ACD: dunque (354) il terzo lato AH è maggiore del terzo AD; dunque la corda, che sottende l'arco maggiore, è la maggiore.

Reciprocamente, se la corda AH vien supposta maggiore di AD, si conchiuderà dagli stessi triangoli che l'angolo ACH è maggiore di ACD, e che perciò l'arco AH è maggiore di AD.

Scolio. Noi supponiamo che gli archi, di cui si tratta, siano minori della mezza-circonferenza. Se dessi fosser maggiori, avrebbe luogo la proprietà contraria, cioè l'arco aumentandosi la corda diminuirebbe, e reciprocamente: così essendo l'arco AKBD maggiore di AKBH, la corda AD del primo è minore della corda AH del secondo.

PROPOSIZIONE VI.

383. Teorema. *Il raggio* CG (Fig. 51) *perpendicolare a una corda* AB *divide questa corda, e l'arco sotteso* AGB, *l'uno e l'altra, in due parti eguali.*

Conducete i raggi CA, CB; questi raggi sono, per rapporto alla perpendicolare CD, due oblique eguali; dunque si allontanano egualmente dalla perpendicolare (360); dunque AD=DB.

In secondo luogo, poichè AD=DB, CG è una perpendicolare inalzata sul mezzo di AB; dunque (361) ogni punto di questa perpendicolare dev'essere egualmente distante dalle due estremità A e B. Il punto G è uno di questi punti; dunque la distanza AG=BG. Ma se la corda AG è eguale alla corda GB, l'arco AG sarà eguale all'arco GB (381); dunque il raggio CG perpendicolare alla corda AB divide l'arco sotteso da questa corda in due parti eguali nel punto G.

Scolio. Il centro C, il mezzo D della corda AB, e il mezzo G dell'arco sotteso da questa corda sono tre punti situati sopra una medesima linea perpendicolare alla corda. Ora bastan due punti per determinare la posizione d'una linea retta; dunque ogni linea retta, che passa per due de' punti mentovati, passerà necessariamente pel terzo, e sarà perpendicolare alla corda.

Ne segue pure che *la perpendicolare inalzata sul mezzo d'una corda passa pel centro e pel mezzo dell'arco sotteso della medesima corda.*

Poichè questa perpendicolare è la stessa di quella, che sarebbe abbassata dal centro sulla medesima corda, giacchè passano ambedue pel mezzo della corda suddetta.

PROPOSIZIONE VII.

384. Teorema. *Per tre punti dati* A, B, C (Fig. 52), *non disposti in linea retta, si può sempre far passare una circonferenza, ma non se ne può far passar che una sola.*

Tirate AB, BC, e dividete queste due rette in due parti eguali colle perpendicolari DE, FG; dico primieramente che queste perpendicolari s'incontreranno in un punto O.

Poichè le linee DE, FG si taglieranno necessariamente, se non son parallele. Or supponiamo che fossero parallele; la linea AB perpendicolare a DE sarebbe perpendicolare a FG (367), e l'angolo K sarebbe retto: ma BK, prolungamento di BD, è differente da BF, poichè i tre punti A, B, C non sono in linea retta; dunque vi sarebbero due perpendicolari BF, BK abbassate da uno stesso punto sulla medesima linea, lo che è impossibile; dunque le perpendicolari DE, FG si taglieranno sempre in un punto O.

Adesso il punto O, come appartenente alla perpendicolare DE, è ad egual distanza dai due punti A e B (361); il medesimo punto O, come appartenente alla perpendicolare FG, è ad egual distanza da due punti B, C; dunque le tre distanze OA, OB, OC sono eguali; dunque la circonferenza descritta col centro O, e col raggio OB passerà per i tre punti dati A, B, C.

Resta così provato che si può sempre far passare una circonferenza per tre punti dati non in linea retta; dico di più che non si può farvene passar che una sola.

Poichè, se vi fosse una seconda circonferenza, che passasse per i tre punti dati A, B, C il suo centro non potrebbe esser fuori della linea DE (361), perchè allora desso sarebbe disugualmente lontano da A e da B; non potrebbe esser neppure fuori della linea FG per una simil ragione: dunque sarebbe nel tempo stesso sulle due linee DE, FG. Or due linee rette non possono tagliarsi in più d'un punto; dunque non v'è che una sola circonferenza, che possa passare per tre punti dati.

Corollario. Due circonferenze non possono incontrarsi in più di due punti; poichè, se avessero tre punti comuni, avrebbero il medesimo centro, e non farebbero che una sola e medesima circonferenza.

PROPOSIZIONE VIII.

385. Teorema. *Due corde eguali sono egualmente lontane dal centro, e di due corde diseguali la minore è la più distante dal centro.*

1.° Sia (Fig. 53) la corda AB=DE: dividete queste corde in due parti eguali colle perpendicolari CF CG, e tirate i raggi CA, CD.

I triangoli rettangoli CAF, DCG hanno le ipotenuse CA, CD eguali; di più il lato AF, metà di AB, è eguale al lato DG, metà di DE; dunque questi triangoli sono eguali (362), ed il terzo lato CF è eguale al terzo CG; dunque 1.° le due corde eguali AB, DE sono egualmente lontane dal centro.

2.° Sia la corda AH maggiore di DE, l'arco AKH sarà maggiore dell'arco DME (382); sull'arco AKH prendete la parte ANB=DME; tirate la corda AB, ed abbassate CF perpendicolare su questa corda, e CI perpendicolare sopra AH: è chiaro che CF è maggiore di CO, e CO maggiore di CI (360); dunque a più forte ragione CF>CI. Ma CF=CG, poichè le corde AB, DE sono eguali; dunque si ha CG>CI; dunque la minore di due corde diseguali è la più lontana dal centro.

PROPOSIZIONE IX.

386. Teorema. *La perpendicolare* BD (Fig. 54) *condotta all'estremità del raggio* CA *è una tangente della circonferenza.*

Poichè ogni obliqua CE è maggiore della perpendicolare CA; dunque il punto E è fuori del circolo; dunque la linea BD non ha che il solo punto A comune colla circonferenza; dunque BD è una tangente (377. viii).

Scolio. Non si può condurre da un punto dato A se non che una sola tangente AD alla circonferenza; poichè, mentre se ne potesse condurre un'altra, questa non sarebbe più perpendicolare al raggio CA; dunque, per rapporto a questa nuova tangente, il raggio CA sarebbe un'obliqua, e la perpendicolare abbassata dal centro su questa tangente sarebbe minore di CA; dunque questa pretesa tangente entrerebbe dentro del circolo, e sarebbe perciò una secante.

PROPOSIZIONE X.

387. Teorema. *Due parallele* AB, DE (Fig. 55) *intercettano sulla circonferenza archi eguali* MN, PQ.

Possono accadere tre casi.

1.° Se le due parallele sono secanti, conducete il raggio CH perpendicolare alla corda MP, esso sarà nel medesimo tempo perpendicolare alla sua parallela NQ (367); dunque il punto H sarà ad un tempo stesso il mezzo dell'arco MHP, e quello dell'arco NHQ (383); si avrà dunque l'arco MH=HP, e l'arco NH=HQ; da ciò resulta MH—NH=HP—HQ, cioè MN=PQ.

2.° Se di due parallele AB, DE (Fig. 56) una è secante, l'altra tangente, al punto di contatto H conducete il raggio CH; questo raggio sarà perpendi-

colare alla tangente DE (386), ed anche alla sua parallela MP. Ma poichè CH è perpendicolare alla corda MP, il punto H è il mezzo dell'arco MHP; dunque gli archi MH, HP compresi tra le parallele AB, DE sono eguali.

3.° Finalmente, se le due parallele DE, IL sono tangenti, una in H, l'altra in K, conducete la secante parallela AB, ed avrete, per quello, che abbiam dimostrato, MH=HP, e MK=KP; dunque l'arco intero HMK=HPK; e si vede inoltre che ciascuno di questi archi è una mezza-circonferenza.

PROPOSIZIONE XI.

388. TEOREMA. *Se due circonferenze si tagliano in due punti, la linea retta, che passa per i loro centri, sarà perpendicolare alla corda, che unisce i punti d'intersezione, e la dividerà in due parti eguali.*

Imperocchè la linea AB (Fig. 57 e 58) che unisce i punti d'intersezione, è una corda comune ai due circoli. Ora, se sul mezzo di questa corda si alza una perpendicolare, essa dee passare per ciascun de' due centri C e D (383). Ma per due punti dati non si può condurre che una sola linea retta; dunque la linea retta, che passa pei centri, sarà perpendiculare sul mezzo della corda comune.

PROPOSIZIONE XII.

389. TEOREMA. *Se la distanza de' due centri è minore della somma de' raggi, e se nel tempo stesso il maggior raggio è minor della somma del più piccolo e della distanza dei centri, i due circoli si taglieranno.*

Poichè, all'effetto che abbia luogo l'intersezione, bisogna che il triangolo CAD (Fig. 57 e 58) sia possibile: bisogna dunque non solamente che CD sia $<$AC+AD, ma che anche il maggior raggio AD sia $<$AC+CD. Ora tutte le volte che il triangolo CAD potrà esser costrutto, è chiaro che le circonferenze descritte coi centri C e D si taglieranno in A e B.

PROPOSIZIONE XIII.

390. TEOREMA. *Se la distanza* CD (Fig. 59) *de' centri di due circoli è eguale alla somma dei loro raggi* CA, AD, *questi due circoli si toccheranno esternamente.*

È chiaro che avranno il punto A comune; ma dessi non avranno che questo punto; poichè, per avere due punti comuni, bisognerebbe che la distanza dei centri fosse minore della somma de' raggi.

PROPOSIZIONE XIV.

391. TEOREMA. *Se la distanza* CD (Fig. 60) *dei centri di due circoli è eguale alla differenza dei loro raggi* CA, AD, *questi due circoli si toccheranno internamente.*

In primo luogo è chiaro che dessi hanno il punto A comune: i medesimi non ne possono avere alcun altro; poichè, all'effetto che ciò accadesse, bisognerebbe che il maggior raggio AD fosse minore della somma del raggio AC e della distanza dei centri CD (389); il che non ha luogo.

Corollario. Dunque, se due circoli si toccano, tanto internamente, quanto esternamente, i centri, ed il punto di contatto sono sulla medesima linea retta.

Scolio. Tutti i circoli, che hanno i loro centri sulla retta CD (Fig. 59 e 60). e che passano pel punto A, sono tangenti gli uni degli altri, cioè non hanno fra loro che il solo punto A di comune. E se pel punto A si conduce AE perpendicolare a CD, la retta AE sarà una tangente comune a tutti questi circoli.

PROPOSIZIONE XV.

392. Teorema. *Nel medesimo circolo, o in circoli eguali, gli angoli eguali* ACB, DCE (Fig. 61) *il cui vertice è al centro, intercettano sulla circonferenza archi eguali* AB, DE. — *Reciprocamente, se gli archi* AB, DE *sono eguali, gli angoli* ACB, DCE *saranno pure eguali.*

Poichè 1.° se l'angolo ACB è eguale all'angolo DCE, questi due angoli potranno situarsi l'uno sull'altro; e siccome i loro lati sono eguali, è chiaro che il punto A cadrà in D, e il punto B in E. Ma allora l'arco AB dee pur cadere sull'arco DE; poichè, se i due archi non fossero confusi in un solo, vi sarebbero nell'uno o nell'altro alcuni de'punti disugualmente lontani dal centro; il che è impossibile: dunque l'arco AB=DE.

2.° Se si suppone AB=DE, dico che l'angolo ACB sarà eguale all'angolo DCE; poichè, se questi angoli non sono eguali, sia ACB il maggiore, e sia preso ACI=DCE; si avrà per ciò che si è dimostrato, AI=DE: ma per supposizione l'arco AB=DE; dunque si avrebbe AI=AB, o la parte eguale al tutto; il che è impossibile: dunque l'angolo ACB=DCE.

PROPOSIZIONE XVI.

393. Teorema. *Nel medesimo circolo, o in circoli eguali, se due angoli al centro* ACB, DCE (Fig. 62) *stanno tra loro come due numeri interi, gli archi intercetti* AB, DE *staranno fra loro come i medesimi numeri, e si avrà questa proporzione.*

Angolo ACB: Angolo DCE :: arco AB: arco DE.

Supponiamo, per esempio, che gli angoli ACB, DCE stiano fra loro come 7 sta a 4; ovvero, il che torna lo stesso, supponiamo che l'angolo M, che servirà di misura comune, sia contenuto sette volte nell'angolo ACB, e quattro nell'angolo DCE. Gli angoli parziali AC*m*, *m*C*n*, *n*C*p*, ec., DC*x*, *x*C*y*, ec., essendo eguali fra loro, gli archi parziali A*m*, *mn*, *np*, ec., D*x*, *xy*, ec. saranno pure fra loro eguali (392); dunque l'arco intero AB starà all'arco intero DE come 7 sta a 4. Ora è manifesto, che lo stesso ragionamento avrebbe sempre luogo quando in vece di 7 e 4 si avessero altri numeri qualunque;

dunque se il rapporto degli angoli ACB, DCE può essere espresso in numeri interi, gli archi AB, DE staranno fra loro come gli angoli ACB, DCE.

Scolio. Reciprocamente, se gli archi AB, DE stessero fra loro come due numeri interi, gli angoli ACB, DCE starebbero fra loro come i medesimi numeri, e si avrebbe sempre ACB : DCE :: AB : DE; perchè gli archi parziali A*m*, *mn*, ec., D*x*, *xy*, ec. essendo eguali, gli angoli parziali AC*m*, *m*C*n*, ec., DC*x*, *x*C*y*, ec. sono pure eguali.

PROPOSIZIONE XVII.

394. Teorema. *Qualunque sia il rapporto de' due angoli* ACB, ACD (Fig. 63), *questi due angoli staranno sempre fra loro come gli archi* AB, AD *intercetti tra i loro lati, e descritti dai loro vertici come centri con raggi eguali.*

Supponiamo l'angolo minore situato dentro il maggiore; se non è vera la Proposizione enunciata, l'angolo ACB starà all'angolo ACD come l'arco AB sta a un arco maggiore, o minore di AD. Supponiamo quest'arco maggiore, e rappresentiamolo con AO; avremo in tal maniera

Angolo ACB: Angolo ACD:: arco AB: arco AO.

Imaginiamo adesso che l'arco AB sia diviso in parti eguali, di cui ciascuna sia minor di DO; vi sarà almeno un punto di divisione fra D e O; sia I questo punto, e tiriamo CI; gli archi AB, AI staranno fra loro come due numeri interi, e si avrà pel Teorema precedente

Angolo ACB: Angolo ACI:: arco AB: arco AI.

Confrontando queste due proporzioni una coll'altra, e osservando che gli antecedenti sono i medesimi, se ne conchiuderà che i conseguenti sono proporzionali, e che perciò

Angolo ACD: Angolo ACI :: arco AO: arco AI.

Ma l'arco AO è maggiore dell'arco AI; bisognerebbe dunque, perchè sussistesse la proporzione, che l'angolo ACD fosse maggiore dell'angolo ACI: ora al contrario è minore; dunque è impossibile che l'angolo ACB stia all'angolo ACD come l'arco AB sta ad un arco maggiore di AD.

Si dimostrerebbe con un ragionamento affatto simile che il quarto termine della proporzione non può esser minore di AD: dunque esso è esattamente AD; dunqne si ha la proporzione

Angolo ACB: Angolo ACD:: arco AB: arco AD.

Corollario I. Il rapporto di due angoli al centro essendo costantemente eguale a quello degli archi intercetti tra i loro lati e descritti col medesimo raggio, ne segue che per misurare un angolo basta misurare l'arco ad esso corrispondente. Infatti *misurare un angolo* vuol dire trovare quante volte esso contiene un altro angolo di nota grandezza e preso per unità, ossia trovare il rapporto che passa tra l'angolo dato e l'angolo unità di misura. Ma questo rapporto equivale, in forza della proposizione ora dimostrata, a quello degli archi respettivamente intercetti tra i loro lati; dunqne si misura un angolo allorchè si misura l'arco compreso tra i suoi lati e descritto col centro al vertice.

**Corollario II.* Tutta la circonferenza comprendendo 360 *gradi* (100), e la somma di tutti gli angoli consecutivi che posson formarsi al centro della circonferenza essendo nè più nè meno di quattro angoli retti (349), è chiaro che un arco di 90° misurerà un angolo retto, e che in conseguenza un dato angolo sarà acuto o ottuso secondochè l'arco intercettato sulla circonferenza dai suoi lati sarà minore o maggiore di 90°.

**Scolio I.* Per ottenere direttamente la misura di un angolo dato, converrebbe ricorrere al confronto immediato di esso con l'angolo retto. Ma questo confronto riescirebbe assai men facile di quello degli archi, e per questo appunto nessuno l'adotta. D'altronde se si voglia il rapporto che ha un dato angolo con l'angolo retto, basterà confrontare l'arco dell'angolo dato, oppure il numero dei gradi che esso contiene, con la quarta parte della circonferenza ossia con 90°. Così si troverà che un arco di 30° corrisponde a $\frac{1}{3}$ di un angolo retto, giacchè $\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$. Del pari un angolo misurato da un arco di 108° è $\frac{6}{5}$ di un angolo retto, ossia $1\frac{1}{5}$, perchè $\frac{108}{90}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$.

Scolio II. Tutto ciò, che è stato dimostrato nelle tre Proposizioni antecedenti per la comparazione degli angoli cogli archi, ha luogo egualmente per la comparazione dei settori cogli archi; poichè i settori sono eguali quando lo sono gli angoli, e in generale sono proporzionali agli angoli: dunque *due settori* ACB, ACD *presi nel medesimo circolo, o in circoli eguali, stanno fra loro come gli archi* AB, AD *basi di questi stessi settori.*

Si vede da ciò che gli archi di circolo, che servono di misura agli angoli, possono parimente servir di misura ai differenti settori d'un medesimo circolo o di circoli eguali.

PROPOSIZIONE XVIII.

395. TEOREMA. *L'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso tra i suoi lati.*

*Supponiamo in primo luogo che uno dei lati passi per il centro, vale a dire che l'angolo sia formato da una corda e da un diametro, e sia (Fig. 64) BAE. Condotto il raggio CB, l'angolo BCE esterno relativamente al triangolo ABC sarà eguale, come sappiamo (371) a BAE+ABC ossia a 2BAE, perchè il triangolo isoscele ACB dà BAE=ABC. Dall'altra parte l'angolo al centro BCE ha per misura l'arco BE; dunque l'angolo BAE essendo la metà di BCE avrà per misura la metà di BE.

Supponiamo in secondo luogo che il centro C cada dentro l'angolo BAD. Tirato il diametro AE, le parti in cui resta diviso l'angolo BAD come formate da un diametro e da una corda, saranno respettivamente misurate da $\frac{1}{2}$BE e da $\frac{1}{2}$ED. Quindi la misura dell'angolo BAD sarà $\frac{1}{2}$BE+$\frac{1}{2}$ED, ossia $\frac{1}{2}$BD.

Supponiamo in terzo luogo che il centro cada fuori dell'angolo. Anche in questo caso, condotto il diametro AE (Fig 65), si osserverà che l'angolo dato

BAD è la differenza degli angoli BAE, DAE e che questi come formati da un diametro e da una corda son misurati dalle metà degli archi BE, DE; e quindi si avrà che l'angolo BAD ha per misura $\frac{1}{2}$BE—$\frac{1}{2}$DE e perciò $\frac{1}{2}$BD.

Dunque ogni angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso tra i suoi lati.

Corollario. I. Tutti gli angoli BAC, BDC, ec. (Fig. 66) iscritti nel medesimo segmento di circolo sono eguali, perchè hanno per misura la metà del l'istess' arco BOC.

II. Ogni angolo BAD (Fig. 67) iscritto nel mezzo-circolo è un angolo retto, poichè ha per misura la metà della mezza-circonferenza BOD, o la quarta parte della circonferenza.

Per dimostrare la stessa cosa in un'altra maniera, tirate il raggio AC; il triangolo BAC è isoscele; onde l'angolo BAC=ABC; il triangolo CAD è parimente isoscele; dunque l'angolo CAD=ADC; dunque BAC+CAD, o BAD= ABD+ADB: ma, se i due angoli B e D del triangolo ABD equivalgono insieme al terzo BAD, i tre angoli del triangolo equivarranno a due volte l'angolo BAD; essi equivalgon d'altronde a due angoli retti; dunque l'angolo BAD è un angolo retto.

III. Ogni angolo BAC (Fig. 66) iscritto in un segmento maggiore del mezzo-circolo è un angolo acuto, poichè ha per misura la metà dell'arco BOC minore di una mezza-circonferenza.

Ed ogni angolo BOC iscritto in un segmento minore del mezzo-circolo è un angolo ottuso, poichè ha per misura la metà dell'arco BAC maggiore di una mezza-circonferenza.

IV. Gli angoli opposti A e C (Fig. 68) d'un quadrilatero iscritto ABCD equivalgono insieme a due angoli retti; poichè l'angolo BAD ha per misura la metà dell'arco BCD, l'angolo BCD ha per misura la metà dell'arco BAD; dunque i due angoli BAD, BCD, presi insieme, han per misura la metà della circonferenza; dunque la loro somma equivale a due angoli retti.

PROPOSIZIONE XIX.

396. Teorema. *L'angolo* BAC (Fig. 69) *formato da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell'arco* AMDC *compreso fra i suoi lati.*

Dal punto di contatto A conducete il diametro AD; l'angolo BAD è retto (386); esso ha per misura la metà della mezza-circonferenza AMD; l'angolo DAC ha per misura la metà di DC; dunque BAD+DAC, o BAC ha per misura la metà di AMD più la metà di DC, o la metà dell'arco intero AMDC.

Si mostrerebbe medesimamente che l'angolo CAE ha per misura la metà dell'arco AC compreso fra i suoi lati.

Problemi relativi ai due primi Libri.

397. PROBLEMA. I.° *Dividere la retta data* AB (Fig. 70) *in due parti eguali.*

Da' punti A e B, come centri, e con un raggio maggiore della metà d' AB, descrivete due archi, che si taglino in D; il punto D sarà egualmente lontano dai punti A e B: segnate nella stessa maniera al di sopra o al di sotto della linea AB un secondo punto E egualmente lontann dai punti A e B; pei due punti D, E tirate la linea DE; dico che DE taglierà la linea AB in due parti eguali nel punto C.

Poichè i punti D ed E, essendo ciascun egualmente distante dalle estremità A e B, debbon trovarsi ambedue nella perpendicolare inalzata sul mezzo di AB. Ma per due punti dati non può passare se non che una sola linea retta; dunque la linea DE sarà quella stessa perpendicolare, che taglia la linea AB in due parti eguali nel punto C.

PROBLEMA II.° *Da un punto* A (Fig. 71) *dato sulla retta* BC *alzare una perpendicolare a questa linea.*

Prendete i punti B e C ad egual distanza da A; indi dai punti B e C, come centri, e con un raggio maggior di BA, descrivete due archi, che si taglino in D; tirate AD, che sarà la perpendicolare richiesta.

Poichè, il punto D essehdo egualmente lontano da B e da C, esso appartiene alla perpendicolare alzata sul mezzo di BC; dunque AD è questa perpendicolare.

Scolio. La medesima costruzione serve a fare un angolo retto BAD in un punto dato A sopra una retta data BC.

PROBLEMA III.° *Da un punto* A (Fig. 72) *dato fuori della retta* BD *abbassare una perpendicolare sopra questa retta.*

Dal punto A, come centro, e con un raggio sufficientemente grande, descrivete un arco, che tagli la linea BD nei due punti B e D; segnate quindi un punto E egualmente distante dai punti B e D, e tirate AE, che sarà la perpendicolare cercata.

Perchè i due punti A ed E sono ciascuno egualmente distanti dai punti B e D; dunque la linea AE è perpendicolare sul mezzo di BD.

PROBLEMA IV.° *Nel punto* A (Fig. 73) *della linea* AB *fare un angolo eguale all' angolo dato* K.

Dal vertice K, come centro, e con un raggio ad arbitrio descrivete l'arco IL terminato ai due lati dell'angolo, dal punto A, come centro, e con un raggio AB eguale a KI descrivete l'arco indefinito BO; prendete poi un raggio eguale alla corda LI; dal punto B, come centro, e con quel raggio descrivete un arco, che tagli in D l'arco indefinito BO; tirate AD; e l'angolo DAB sarà eguale all'angolo dato K.

Perocchè i due archi BD, LI hanno raggi eguali e corde eguali; dunque sono eguali (381); dunque l'angolo BAD=IKL.

PROBLEMA V.° *Dividere un angolo o un arco dato in due parti eguali.*

1.° Se bisogni dividere l'arco AB (Fig. 74) in due parti eguali, dai punti A e B, come centri, e con uno stesso raggio descrivete due archi, che si taglino in D; pel punto D e pel centro C tirate CD, che taglierà l'arco AB in due parti eguali nel punto E.

Poichè ciascuno dei punti C e D è egualmente distante dalle estremità A e B della corda AB; dunque la retta CD è perpendicolare sul mezzo di questa corda; essa dunque divide l'arco AB in due parti eguali nel punto E (383).

2.° Se bisogni dividere in due parti eguali l'angolo ACB, si comincerà da descrivere, col vertice C, come centro, l'arco AB, e si procederà nel resto come si è detto qui sopra. È chiaro che la linea CD dividerà in due parti eguali l'angolo ACB.

Scolio. Si può colla medesima costruzione dividere ciascuna delle metà AE, EB in due parti eguali; così con suddivisioni successive si dividerà un angolo o un arco dato in quattro parti eguali, in otto, in sedici, ec.

PROBLEMA VI.° *Per un punto dato* A (Fig. 75) *condurre una parallela alla linea retta data* BC.

Dal punto A, come centro, e con un raggio abbastanza grande descrivete l'arco indefinito EO; dal punto E, come centro, e col medisimo raggio descrivete l'arco AF; prendete ED=AF, e tirate AD, che sarà la parallela richiesta.

Poichè, conducendo AE, si vede che gli angoli alterni AEF, EAD sono eguali; dunque le linee AD, EF son parallele.

PROBLEMA VII.° *Essendo dati due angoli* A *e* B (Fig. 76) *d'un triangolo, trovare il terzo.*

Tirate la linea indefinita DEF; fate al punto E l'angolo DEC=A, e l'angolo CEH=B; l'angolo restante HEF sarà il terzo angolo richiesto; poichè questi tre angoli presi insieme equivalgono a due angoli retti.

PROBLEMA VIII.° *Essendo dati due lati* B *e* C *d'un triangolo* (Fig. 77), *e l'angolo* A, *che essi comprendono, descrivere il triangolo.*

Avendo tirata la linea indefinita DE, fate al punto D l'angolo EDF eguale all'angolo dato A; prendete quindi DG=B, DH=C, e tirate GH; DGH sarà il triangolo ricercato.

PROBLEMA IX.° *Essendo dati un lato, e due angoli d'un triangolo, descrivere il triangolo.*

I due angoli dati saranno o tutti due adiacenti al lato dato, o uno adiacente e l'altro opposto. In questo ultimo caso cercate il terzo (Prob. VII.°), ed avrete così i due angoli adiacenti. Posto ciò, tirate (Fig. 78) la retta DE eguale al lato dato; fate al punto D l'angolo EDF eguale ad uno degli angoli adiacenti, e al punto E l'angolo DEG eguale all'altro; le due linee DF, EG si taglieranno in H e DEH sarà il triangolo richiesto.

PROBLEMA X.° *Essendo dati* (Fig. 79) *i tre lati* A, B, C *d'un triangolo, descrivere il triangolo.*

Tirate DE eguale al lato A; dal punto E, come centro, e con un raggio eguale al secondo lato B descrivete un arco; dal punto D, come centro, e con

un raggio eguale al terzo lato C descrivete uo altr'arco, che taglierà il primo in F; tirate DF, EF; e DEF sarà il triangolo cercato.

Scolio. Se uno dei lati fosse maggiore della somma degli altri due, gli archi non si taglierebbero; ma la soluzione sarà sempre possibile se la somma dei due lati, presi come si vorrà, sia più grande del terzo.

PROBLEMA XI.° *Essendo dati* (Fig. 80) *due lati* A *e* B *d'un triangolo, coll'angolo* C *opposto al lato* B, *descrivere il triangolo.*

Vi sono due casi: 1.° se l'angolo C è retto od ottuso, fate l'angolo EDF eguale all'angolo C; prendete DE=A; dal punto E, come centro, e con un raggio eguale al lato dato B descrivete un arco, che tagli in F la linea DF; tirate EF; e DEF sarà il triangolo richiesto.

Bisogna in questo primo caso che il lato B sia maggiore di A; poichè l'angolo C essendo retto od ottuso, è il maggiore degli angoli del triangolo; dunque il lato opposto dev'essere pure il maggiore.

2.° Se l'angolo C (Fig. 81) è acuto, e B sia maggiore di A, ha sempre luogo la medesima costruzione, e DEF è il triangolo cercato.

Ma se, essendo acuto l'angolo C (Fig. 82), il lato B è minore di A, allora l'arco descritto col centro E, e col raggio EF=B taglierà il lato DF in due punti F e G situati dalla medesima parte per rapporto a D; dunque vi saran due triangoli DEF, DEG, che sodisfaranno egualmente al Problema.

Scolio. Il Problema sarebbe impossibile in tutti i casi se il lato B fosse minore della perpendicolare abbassata da E sulla retta DF.

PROBLEMA XII.° *Essendo dati* (Fig. 83) *i lati adiacenti* A *e* B *d'un parallelogrammo coll'angolo* C *da essi compreso, descrive il parallelogrammo.*

Tirate la linea DE=A; fate al puoto D l'angolo FDE=C; prendete DF=B; descrivete due archi, uno dal punto F, come centro, e con un raggio FG=DE, l'altro dal punto E, come centro, e con un raggio EG=DF: al punto G, ove questi due archi si tagliano, tirate FG, EG; e DEGF sarà il parallelogrammo richiesto.

Poichè, per costruzione, i lati opposti sono eguali; dunque la Figura descritta è un parallelogrammo; e questo parallelogrammo è formato coi lati dati, e l'angolo dato.

Corollario. Se l'angolo dato è retto, la Figura sarà un rettangolo; se inoltre i lati sono eguali, sarà un quadrato.

PROBLEMA XIII.° *Trovare il centro d'un circolo o d'un arco dato.*

Prendete a piacere nella circonferenza, o nell'arco tre punti A, B, C (Fig. 84); tirate o immaginate che si tirino le rette AB e BC; dividete queste due linee in due parti eguali per mezzo delle perpendicolari DE, FG; il punto O, ove queste perpendicolari s'incontrano, sarà il centro cercato.

Scolio. La medesima costruzione serve a far passare una circonferenza di circolo pei tre punti A, B, C, come pure a descrivere una circonferenza, nella quale il triangolo dato ABC sia iscritto.

PROBLEMA XIV.° *Per un punto dato condurre una tangente ad un circolo dato.*

Se il punto dato A (Fig. 85) è sulla circonferenza, tirate il raggio CA, e conducete AD perpendicolare a CA; AD sarà la tangente richiesta (386).

Se il punto A (Fig. 86) è fuori del circolo, unite il punto A, ed il centro colla linea retta CA; dividete CA in due parti eguali nel punto O; dal punto O, come centro, e col raggio OC descrivete una circonferenza, che taglierà la circonferenza data nel punto B; tirate AB, ed AB sarà la tangente cercata.

Poichè, tirando CB, l'angolo CBA iscritto nel mezzo circolo è un angolo retto (395); dunque AB è perpendicolare all'estremità del raggio CB; essa dunque è tangente.

Scolio. Essendo il punto A fuori del circolo, si vede che vi sono sempre due tangenti eguali AB, AD, che passano pel punto A: esse sono eguali perchè i triangoli rettangoli CBA, CDA hanno l'ipotenusa CA comune, ed il lato CB =CD; dunque sono eguali (362); dunque AD=AB, e nel tempo stesso l'angolo CAD=CAB.

Problema XV.° *Iscrivere un circolo* (Fig. 87) *in un triangolo dato* ABC.

Dividete gli angoli A e B in due parti eguali colle rette AO e BO, che si incontreranno in O; dal punto O abbassate le perpendicolari OD, OE, OF sui tre lati del triangolo: dico che queste perpendicolari saranno eguali tra loro; poichè, per costruzione, l'angolo DAO=OAF, l'angolo retto ADO=AFO; dunque il terzo angolo AOD è eguale al terzo AOF. D'altronde il lato AO è comune ai due triangoli AOD, AOF, e gli angoli adiacenti al lato eguale sono eguali; dunque questi due triangoli sono eguali; dunque DO=OF. Si proverà parimente che i due triangoli BOD, BOE sono eguali; dunque OD=OE; dunque le tre perpendicolari OD, OE, OF sono eguali fra loro.

Adesso, se dal punto O, come centro, e col raggio OD si descriva una circonferenza, è chiaro che questa sarà iscritta nel triangolo ABC; poichè il lato AB, perpendicolare all'estremità del raggio OD, è una tangente; ed è lo stesso dei lati BC, AC.

Scolio. Le tre linee rette, che dividono in due parti eguali i tre angoli d'un triangolo, concorrono in un medesimo punto.

Problema XVI.° *Sopra una linea retta data* AB (Fig. 88 e 89) *descrivere un segmento capace dell'angolo dato* C; *cioè un segmento tale che tutti gli angoli, che vi posson essere iscritti, siano eguali all'angolo dato* C.

Prolungate AB verso D; fate al punto B l'angolo DBE=C; tirate BO perpendicolare a BE, e GO perpendicolare sul mezzo di AB; dal punto d'incontro O, come centro, e col raggio OB descrivete un circolo; il segmento richiesto sarà AMB.

Poichè, siccome BF è perpendicolare all'estremità del raggio OB, essa BF è una tangente, e l'angolo ABF ha per misura la metà dell'arco AKB (396); d'altronde l'angolo AMB, come angolo iscritto, ha pure per misura la metà dell'arco AKB; dunque l'angolo AMB=ABF=EBD=C; dunque tutti gli angoli iscritti nel segmento AMB sono eguali all'angolo dato C.

Scolio. Se l'angolo dato fosse retto, il segmento cercato sarebbe il mezzo-circolo descritto sul diametro AB.

Problema XVII.° *Trovare il rapporto numerico di due linee rette* (Fig. 90) *date* AB, CD *seppure queste due linee hanno tra loro una misura comune.*

Portate la minore CD sulla maggiore AB tante volte, quante può esservi contenuta; per esempio, due volte, col resto BE.

Portate il resto BE sulla linea CD tante volte, quante può esservi contenuto, una volta, per esempio, col resto DF.

Portate il secondo resto DF sul primo BE tante volte, quante può esservi contenuto; una volta, per esempio, col resto BG.

Portate il terzo resto BG sul secondo DF tante volte, quante può esservi contenuto.

Continuate così finchè abbiate un resto, che sia contenuto un numero esatto di volte nel resto prossimo precedente.

Allora quell'ultimo resto sarà la comune misura delle linee proposte; e riguardandolo come l'unità, si troveranno facilmente i valori dei resti precedenti, e finalmente quelli delle due linee proposte, donde si conchiuderà il loro rapporto in numeri.

Per esempio, se si trova che GB è contenuto due volte appunto in FD, GB sarà la comune misura delle due linee proposte. Sia BG=1, si avrà FD=2; ma EB contiene una volta FD più GB; dunque EB=3; CD contiene una volta EB più FD; dunque CD=5; finalmente AB contiene due volte CD più EB; dunque AB=13; dunque il rapporto delle due linee AB, CD è quello di 13 a 5. Se la linea CD fosse presa per unità, la linea AB sarebbe $\frac{13}{5}$; e se la linea AB fosse presa per unità, la linea CD sarebbe $\frac{5}{13}$.

Scolio. Il metodo, che si è spiegato, è quel medesimo, che prescrive l'Aritmetica per trovare il comun divisore di due numeri (46) laonde non ha bisogno d'altra dimostrazione.

Può accadere che, per quanto si continui lungamente l'operazione, non si trovi mai un resto, che sia contenuto un numero preciso di volte nel precedente. Allora le due linee non hanno alcuna misura comune, e son quelle, che si chiamano *incommensurabili:* se ne vedrà in seguito un esempio nel rapporto, che vi è tra la diagonale, ed il lato del quadrato. Non si può dunque allora trovare il rapporto esatto in numeri; ma, trascurando l'ultimo resto, si troverà un rapporto più o meno approssimativo secondochè più o meno sarà stata spinta avanti l'operazione.

Problema XVIII.° *Essendo dati* (Fig. 91) *due angoli* A *e* B, *trovare la loro misura comune, se l'abbiano, e quindi il loro rapporto in numeri.*

Descrivete con raggi eguali gli archi CD, EF, che servono di misura a questi angoli; precedete, in seguito, alla comparazione degli archi CD, EF come nel Problema precedente, poichè un arco può portarsi sopra un arco dello stesso raggio come una linea retta sopra una linea retta. Giungerete così alla misura comune degli archi CD, EF, se l'abbiano, ed al loro rapporto in numeri.

Questo rapporto sarà lo stesso di quello degli angoli dati (394); e se DO è la misura comune degli archi, DAO sarà quella degli angoli.

Scolio. Si può così trovare il valore assoluto d'un angolo paragonando l'arco, che gli serve di misura, a tutta la circonferenza: per esempio, se l'arco CD sta alla circonferenza come 3 a 25, l'angolo A sarà i $\frac{3}{25}$ di quattro angoli retti, ovvero i $\frac{12}{25}$ d'un angolo retto.

Potrà pure accadere che gli archi paragonati non abbiano alcuna misura comune; allora non si avranno per gli angoli se non che dei rapporti in numeri più o meno approssimativi, secondo che l'operazione sarà stata spinta più o meno lungi.

LIBRO TERZO.

LE PROPORZIONI DELLE FIGURE.

398. Definizioni. I. Chiamerò *Figure equivalenti* quelle, le di cui superficie sono eguali.

Due Figure possono essere equivalenti quantunque siano affatto dissimili; per esempio, un circolo può essere equivalente a un quadrato, un triangolo ad un rettangolo, ec.

La denominazione di *Figure eguali* sarà conservata a quelle, che essendo applicate l'una sull'altra, coincidono in tutti i lor punti: tali sono due circoli, di cui i raggi siano eguali, due triangoli, di cui i tre lati siano respettivamente eguali, ec.

II. Due Figure son *simili* quando hanno gli angoli respettivamente eguali, ed i lati *omologhi* proporzionali. Per lati omologhi s' intendono quelli, che hanno la medesima posizione nelle due Figure, o che sono adiacenti ad angoli eguali. Questi angoli stessi si chiamano angoli *omologhi*.

Due Figure eguali son sempre simili, ma due Figure simili possono essere molto diseguali.

III. In due circoli differenti si chiamano *archi simili*, *settori simili*, *segmenti simili* quelli, che corrispondono ad angoli al centro eguali.

Così, essendo l'angolo A (Fig. 92) eguale all'angolo O, l'arco BC è simile all'arco DE, il settore ABC al settore ODE, ec.

IV. L'*altezza* d'un parallelogrammo è la perpendicolare EF (Fig. 93), che misura la distanza de' due lati opposti AB, CD presi per *basi*.

V. L'*altezza* d'un triangolo è la perpendicolare AD (Fig. 94) abbassata dal vertice d'un angolo A sul lato opposto BC, considerato come *base*.

VI. L'*altezza* del trapezio è la perpendicolare EF (Fig. 95) condotta fra i suoi due lati paralleli AB, CD.

VII. *Area* o *superficie* d'una Figura sono termini presso a poco sinonimi. L'area indica più particolarmente la quantità superficiale della Figura in quanto che essa è misurata, o paragonata ad altre superficie.

PROPOSIZIONE I.

399. Teorema. *I parallelogrammi* (Fig. 96), *che hanno basi eguali ed altezze eguali, sono equivalenti.*

*Sia AB (Fig. 96) la base comune dei due parallelogrammi ABCD, ABEF. Poichè si suppone che essi abbiano la medesima altezza, le basi superiori dovendo essere equidistanti dalla base comune, si troveranno sopra una medesima retta parallela ad AB. Ora per la natura dei parallelogrammi si ha AD eguale e parallelo a BC, AF eguale e parallelo a BE. Di qui ne segue che l'angolo DAF è eguale a CBE (370) e che perciò i due triangoli ADF, BCE, come aventi un angolo eguale compreso tra lati eguali, sono eguali.

Ma, se dal quadrilatero ABED si toglie il triangolo ADF, resta il parallelogrammo ABEF; e se dallo stesso quadrilatero ABED si toglie il triangolo CBE, resta il parallelogrammo ABCD; dunque i due parallelogrammi ABCD, ABEF, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, sono equivalenti.

Corollario. Dunque ogni parallelogrammo ABCD (Fig. 97) è equivalente al rettangolo ABEF della medesima base, e della medesima altezza.

PROPOSIZIONE II.

400. Teorema. *Ogni triangolo* ABC (Fig. 98) *è la metà del parallelogrammo* ABCD, *che ha la medesima base e la medesima altezza.*

Poichè i triangoli ABC, ACD sono eguali (375).

Corollario I. Dunque un triangolo ABC è la metà del rettangolo BCEF, che ha la medesima base BC, e la medesima altezza AO, perchè il rettangolo BCEF è equivalente al parallelogrammo ABCD.

II. Tutti i triangoli, che hanno basi eguali ed altezze eguali, sono equivalenti.

PROPOSIZIONE III.

401. Teorema. *Due rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le respettive basi.*

*Supponiamo primieramente che le basi AB, AE (Fig. 99), siano commensurabili tra di loro, e che stiano come due numeri interi che rappresenteremo con m, n; cosicchè abbiasi $AB : AE :: m : n$. Immaginando divisa la base AB in m parti eguali, AE ne conterrà n, e se da tutti i punti di divisione si concepiscano inalzate altrettante perpendicolari sulla base AB, è chiaro che queste divideranno il rettangolo ABCD in m rettangoli eguali, come aventi egual

base ed altezza, e che il rettangolo AEFD conterrà n di questi rettangoli. Avremo perciò che ABCD, AEFD stanno tra loro come m ad n; e poichè anche le basi AB, AE stanno come m ad n, risulterà

ABCD · AEFD : : AB : AE.

Supponiamo in secondo luogo che le basi AB, AE (Fig. 100) siano incommensurabili fra di loro; dico che ciò nonostante si avrà

ABCD : AEFD : : AB : AE.

Poichè, se questa proporzione non è vera, restando gli stessi i tre primi termini, il quarto sarà maggiore o minore di AE. Supponiamo che sia maggiore, e che si abbia

ABCD : AEFD : : AB : AO.

Divisa la linea AB in parti eguali minori di EO; vi sarà almeno un punto di divisione I situato tra E ed O; da questo punto si alzi sopra AI la perpendicolare IK; le basi AB, AI saranno commensurabili fra di loro; e così si avrà, secondo ciò che si è or dimostrato,

ABCD : AIKD : : AB : AI.

Ma si ha per supposizione

ABCD : AEFD : : AB : AO.

In queste due proporzioni gli antecedenti sono eguali; dunque i conseguenti sono proporzionali, e ne risulta

AIKD : AEFD : : AI : AO

Ma qui il primo estremo AIKD è maggiore del medio AEFD, e del pari l'estremo AO è maggiore del medio AI; dunque questa proporzione ha ambedue gli estremi maggiori dei medj e quindi (131) essa è assurda; dunque ABCD non può stare ad AEFD come AB sta ad una linea maggiore di AE.

Con un ragionamento affatto simile si proverebbe che il quarto termine della proporzione non può esser minore di AE; dunque esso è esattamente eguale ad AE.

Dunque, qualunque siasi il rapporto delle basi, due rettangoli della medesima altezza ABCD, AEFD stanno fra loro come le loro basi AB, AE.

PROPOSIZIONE IV.

402. Teorema. *Due rettangoli qualunque* ABCD, AEGF (Fig. 101) *stanno fra loro come i prodotti delle basi moltiplicate per l'altezze; talmente che si ha* ABCD : AEGF : : AB$\times$AD : AE$\times$AF.

Avendo disposto i due rettangoli in modo, che gli angoli in A sieno opposti al vertice, prolungate i lati GE, CD finchè s'incontrino in H; i due rettangoli ABCD, AEHD hanno la medesima altezza AD; essi stanno dunque tra loro come le loro basi AB, AE: parimente i due rettangoli AEHD, AEGF hanno la medesima altezza AE; essi stanno dunque fra loro come le loro basi AD, AF; laonde si avranno le due proporzioni

ABCD : EAHD : : AB : AE

AEHD : AEGF : : AD : AF.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni (136), e osservando che il medio termine AEHD può essere omesso come moltiplicatore comune all'antecedente ed al conseguente (126), si avrà

$$ABCD : AEGF :: AB\times AD : AE\times AF.$$

**Corollario I.* Segue di qui che la misura della superficie di un rettangolo è data dal prodotto della sua base moltiplicata per la sua altezza. Sia infatti A l'altezza e B la base d'un rettangolo R da misurarsi, siano inoltre a e b l'altezza e la base di un rettangolo r preso per unità di misura, avremo la proporzione $R : r :: A\times B : a\times b$ dalla quale potremo dedurre (128)

$$\frac{R}{r}=\frac{A\times B}{a\times b}=(64)\frac{A}{a}\times\frac{B}{b}.$$

Ma $\frac{R}{r}$ esprime il numero delle volte che il rettangolo R contiene l'unità di misura r, ossia esprime la misura del rettangolo R, ed $\frac{A}{a}\times\frac{B}{b}$ esprime il prodotto dei numeri che risultano portando sopra l'altezza e la base di R l'altezza e la base di r. Dunque per misurare la superficie di un dato rettangolo basta moltiplicare l'uno per l'altro i due numeri astratti che si ottengono portando sull'altezza e sullą base di esso l'altezza e la base del rettangolo scelto per unità; il che appunto si intende di esprimere dicendo che l'area di un rettangolo eguaglia il prodotto della sua base per la sua altezza, e scrivendo $R=A\times B$.

**Corollario. II.* Se il rettangolo da misurarsi avesse eguali l'altezza e la base, cioè se fosse un quadrato che indicheremo con Q, allora la sua superficie, rappresentando con L uno dei lati, sarà data da $L\times L$ ossia da L^2. Dunque la superficie di un quadrato eguaglia la seconda potenza d'uno dei suoi lati, e di qui appunto ha origine l'uso di appellare *quadrati* le potenze del secondo grado (108).

Scolio I.* Per l'unità di superficie si sceglie molto comodamente il quadrato che ha per lato l'unità di lunghezza. Così per misurare un rettangolo, come A (Fig. 102) ossia per averne, come suol dirsi, la ***quadratura*, si porta tanto sopra la base come sopra l'altezza l'unità lineare, per esempio il Braccio, e trovando che è contenuto 10 volte sull'una e 3 sull'altra, si conclude che la superficie è 30 ***Braccia quadrate***, vale a dire 30 quadrati ognuno di un Braccio per lato.

Scolio II. Si confonde assai spesso in Geometria il prodotto di due lineę col loro *rettangolo*. Questa espressione è anche passata nell'Aritmetica per denotare il prodotto di due numeri diseguali.

PROPOSIZIONE V.

403. Teorema. *L'area d'un parallelogrammo qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Poichè il parallelogrammo ABCD (Fig. 97) è equivalente al rettangolo ABEF, che ha la medesima base AB, e la medesima altezza BE (399); ma

quest'ultimo ha per misura $AB \times BE$ (402); dunque $AB \times BE$ è eguale all'area del parallelogrammo ABCD.

**Corollario.* Rappresentando con P, P_1 due parallelogrammi qualunque, con A, A_1 le loro altezze, con B, B_1 le loro basi, avremo $P = A \times B$, $P_1 = A_1 \times B_1$, e di qui $P : P_1 :: A \times B : A_1 \times B_1$. Dunque due parallelogrammi qualunque stanno tra loro come i prodotti delle basi per le altezze.

Se poi si supponga $A = A_1$ ovvero $B = B_1$, la proporzione precedente si ridurrà (126) a $P : P_1 :: B : B_1$ ovvero a $P : P_1 :: A : A_1$, e perciò due parallelogrammi della medesima altezza stanno tra loro come le basi, e due parallelogrammi della medesima base stanno tra loro come le altezze.

PROPOSIZIONE VI.

404. TEOREMA. *L'area d'un triangolo è eguale al prodotto della sua base per la metà della sua altezza.*

Poichè il triangolo ABC (Fig. 104) è la metà del parallelogrammo ABCE, che ha la medesima base BC, e la medesima altezza AD (400); ma la superficie del parallelogrammo $= BC \times AD$ (403); dunque quella del triangolo $= \frac{1}{2} BC \times AD$, o $BC \times \frac{1}{2} AD$.

**Corollario.* Ragionando come nel corollario della proposizione precedente, si avrà che due triangoli qualunque stanno tra loro come i prodotti delle basi nelle altezze; che due triangoli della medesima base stanno tra loro come le altezze, e che infine due triangoli della medesima altezza stanno tra loro come le basi.

**Scolio.* Mediante la superficie del triangolo può aversi quella di qualunque poligono. A quest'effetto, da uno dei vertici del poligono si conducono agli altri vertici delle diagonali; si determina la superficie di ognuno dei triangoli nei quali resta decomposto il poligono; e in ultimo si prende la somma delle superficie trovate.

PROPOSIZIONE VII.

405. TEOREMA. *L'area del trapezio* ABCD (Fig. 105) *è eguale alla sua altezza* EF *moltiplicata per la semi-somma delle basi parallele* AB, CD.

Pel punto I, mezzo del lato CB, conducete KL parallela al lato opposto AD, e prolungate DC finchè incontri KL.

Nei triangoli IBL, ICK si ha il lato $IB = IC$, per costruzione, l'angolo $LIB = CIK$, e l'angolo $IBL = ICK$, poichè CK, e BL son parallele; dunque questi triangoli sono eguali; dunque il trapezio ABCD è equivalente al parallelogrammo ADKL, ed ha per misura $EF \times AL$.

Ma si ha $AL = DK$; e poichè il triangolo IBL è eguale al triangolo KCI, anco il lato $BL = CK$: dunque $AB + CD = AL + DK = 2AL$, ovvero AL è la semi-somma delle basi AB, CD; dunque finalmente l'area del trapezio ABCD è

eguale all'altezza EF moltiplicata per la semi-somma delle basi AB, CD il che si esprime così: $ABCD = EF \times \left(\frac{AB+CD}{2}\right)$.

Scolio. Se pel punto I, mezzo di BC, si conduce IH parallela alla base AB, il punto H sarà pure il mezzo di AD, perchè la figura AHIL è un parallelogrammo, come anche DHIK, poichè i lati opposti son paralleli; si ha dunque AH=IL, e DH=IK: ora IL=IK, poichè i triangoli, BIL, CIK sono eguali; dunque AH=DH.

Si può osservare che la linea $HI = AL = \frac{AB+CD}{2}$; dunque l'area del trapezio può esprimersi ancora da $EF \times HI$: essa dunque è eguale all'altezza del trapezio moltiplicata per la linea, che unisce i mezzi dei lati non paralleli.

PROPOSIZIONE VIII.

406. Teorema. *Se una linea* AC (Fig. 106) *è divisa in due parti* AB, BC, *il quadrato fatto sull'intera linea* AC *conterrà il quadrato fatto sopra una parte* AB, *più il quadrato fatto sopra l'altra parte* BC, *più due volte il rettangolo compreso sotto le due parti* AB *e* BC, *il che si esprime così:* AC^2 o $(AB+BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC$.

Costruite il quadrato ACDE; prendete AF=AB; conducete FG parallela ad AC, e BH parallela ad AE.

Il quadrato ACDE è diviso in quattro parti: la prima ABIF è il quadrato fatto sopra AB, poichè si è preso AF=AB; la seconda IGDH è il quadrato fatto sopra BC, poichè siccome si ha AC=AE, e AB=AF, la differenza AC—AB è egaale alla differenza AE—AF, lo che dà BC=EF: ma, a cagion delle parallele, IG=BC, e DG=EF; dunque HIGD è eguale al quadrato fatto sopra BC. Essendo tolte queste due parti del quadrato totale, restano i due rettangoli BCGI, EFIH, che hanno ciascun per misura $AB \times BC$; dunque il quadrato fatto sopra AC, ec.

Scolio. Questa Proposizione si accorda con quella, che si dimostra in Algebra (202) per la formazione del quadrato d'un binomio, e ch'è così espressa:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

PROPOSIZIONE IX.

407. Teorema. *Se la linea* AC (Fig. 107) *è la differenza di due linee rette* AB, BC, *il quadrato fatto sopra* AC *conterrà il quadrato di* AB, *più il quadrato di* BC, *meno due volte il rettangolo fatto sopra* AB, *e* BC; *cioè si avrà* AC^2, ovvero $(AB-BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC$.

Costruite il quadrato ABIF; prendete AE=AC; conducete CG parallela a BI, HK parallela ad AB, e terminate il quadrato EFLK.

I due rettangoli CBIG, GLKD hanno ciascun per misura $AB \times BC$; se si tolgano entrambi dalla Figura intera ABILKEA, che ha per valore $AB^2 + BC^2$, è chiaro che resterà il quadrato ACDE; dunque ec.

Scolio. Questa Proposizione combina (202) colla formula d' Algebra $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

PROPOSIZIONE X.

408. Teorema. *Il rettangolo fatto sulla somma, e la differenza di due linee* (Fig. 108) *è eguale alla differenza dei quadrati di queste linee: così si ha* $(AB+BC)\times(AB-BC)=AB^2-BC^2$.

Costruite sopra AB, ed AC i quadrati ABIF, ACDE; prolungate AB di una quantità BK=BC; e terminate il rettangolo AKLE.

La base AK del rettangolo è la somma delle due linee AB, BC; la sua altezza AE è la differenza di queste medesime linee. Dunque il rettangolo $AKLE=(AB+BC)\times(AB-BC)$. Ma questo medesimo rettangolo è composto delle due parti ABHE+BHLK; e la parte BHLK è eguale al rettangolo EDGF, perchè BH=ED, e BK=EF; dunque AKLE=ABHE+EDGF. Ora queste due parti formano il quadrato ABIF, meno il quadrato DHIG, ch' è il quadrato fatto sopra BC: dunque finalmente $(AB+BC)\times(AB-BC)=AB^2-BC^2$.

Scolio. Questa Proposizione combina (166. III.º) colla formula d' Algebra $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

PROPOSIZIONE XI.

409. Teorema. *Il quadrato fatto sull' ipotenusa d' un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati.*

Sia ABC (Fig. 109) un triangolo rettangolo in A: avendo formato i quadrati sopra i tre lati, abbassate dal vertice dell' angolo retto sopra l' ipotenusa la perpendicolare AD, che prolungherete fino in E; tirate quindi le diagonali AF, CH.

L' angolo ABF è composto dell' angolo ABC più l' angolo retto CBF; l' angolo CBH è composto del medesimo angolo ABC più l' angolo retto ABH; dunque l' angolo ABF=HBC. Ma AB=BH, come lati d' un medesimo quadrato, e BF=BC per la medesima ragione, dunque i triangoli ABF, HBC hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali; dunque sono eguali.

Il triangolo ABF è la metà del rettangolo BDEF (o per più brevità BE), che ha la medesima base BF, e la medesima altezza BD (400). Il triangolo HBC è parimente la metà del quadrato AH; perchè essendo retto l' angolo BAC, come pure BAL, AC ed AL non fanno che una sola linea retta parallela a HB; dunque il triangolo HBC, ed il quadrato AH, che hanno la base comune BH, hanno pure l' altezza comune AB; dunque il triangolo è la metà del quadrato.

Si è già provato che il triangolo ABF è eguale al triangolo HBC; dunque il rettangolo BDEF, doppio del triangolo ABF, è equivalente al quadrato

AH, doppio del triangolo HBC. Si dimostrerà parimente che il rettangolo CDEG è equivalente al quadrato AI; ma i due rettangoli BDEF, CDEG presi insieme fanno il quadrato BCGF, dunque il quadrato BCGF fatto sull'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati ABHL, ACIK fatti sugli altri due lati, o, in altri termini, $BC^2=AB^2+AC^2$.

Corollario I. Dunque il quadrato d'uno dei lati dell'angolo retto è eguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro lato, il che si esprime così $AB^2=BC^2-AC^2$.

II. Sia ABCD (Fig. 118) un quadrato, AC la sua diagonale; il triangolo ABC essendo rettangolo ed isoscele, avremo $AC^2=AB^2+BC^2=2AB^2$; dunque *il quadrato fatto sulla diagonale* AC *è doppio del quadroto fatto sul lato* AB.

Si può render sensibile questa proprietà conducendo pei punti A e C le parallele a BD, e pei punti B e D le parallele ad AC: si formerà così un nuovo quadrato EFGH, che sarà il quadrato di AC. Or si vede che EFGH contiene otto triangoli eguali ad ABE, e che ABCD ne contien quattro; dunque il quadrato EFGH è doppio d'ABCD.

Poichè $AC^2 : AB^2 :: 2 : 1$, si ha estraendone le radici quadrate, $AC:AB:: \sqrt{2} : 1$; dunque *la diagonale d'un quadrato è incommensurabile col suo lato.* Questo è ciò, che svilupperemo di più in un'altra occasione.

III. Si è dimostrato (Fig. 109) che il quadrato AH è equivalente al rettangolo BDEF: ora, a cagione dell'altezza comune BF, il quadrato BCGF sta al rettangolo BDEF come la base BC sta alla base BD; dunque

$$BC^2 : AB^2 :: BC : BD.$$

Dunque *il quadrato dell'ipotenusa sta al quadrato d'uno dei lati dell'angolo retto come l'ipotenusa sta al segmento adiacente a questo lato.* Il *segmento*, di cui adesso si tratta, è la parte dell'ipotenusa determinata dalla perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto; così BD è il segmento adiacente al lato AB, e DC è il segmento adiacente al lato AC. Si avrebbe similmente

$$BC^2 : AC^2 :: BC : DC.$$

IV. I rettangoli BDEF, DCGE, avendo pure la medesima altezza, stanno fra loro come le loro basi BD, DC. Or questi rettangoli sono equivalenti ai quadrati AB^2, AC^2; dunque

$$AB^2 : AC^2 :: BD : DC.$$

Dunque *i quadrati dei due lati dell'angolo retto stanno fra loro come i segmenti dell'ipotenusa adiacenti a questi lati.*

PROPOSIZIONE XII.

410. Teorema. *In un triangolo* ABC (Fig. 110), *se l'angolo* C *è acuto, il quadrato del lato opposto sarà minore della somma dei quadrati dei lati, che comprendono l'angolo* C*; e se si abbassi* AD *perpendicolare sopra* BC, *la differenza sarà eguale al doppio del rettangolo* $BC\times CD$*; talmente chè si avrà*

$$AB^2=AC^2+BC^2-2BC\times CD.$$

Vi sono due casi. 1.° Se la perpendicolare cade dentro il triangolo ABC, si avrà $BD=BC-CD$, e per conseguenza (407) $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\times CD$. Aggiungendo da ambe le parti AD^2, e osservando che i triangoli rettangoli ABD, ADC danno $AD^2+BD^2=AB^2$, e $AD^2+DC^2=AC^2$, si avrà $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\times CD$.

2.° Se la perpendicolare AD cade fuori del triangolo ABC, si avrà $BD=CD-BC$, e per conseguenza (407) $BD^2=CD^2+BC^2-2CD\times BC$. Aggiungendo da ambe le parti AD^2, se ne conchiuderà medesimamente

$$AB^2=BC^2+AC^2-2AB\times CD.$$

PROPOSIZIONE XIII.

411. Teorema. *In un triangolo* ABC (Fig. 111) *se l'angolo* C *è ottuso, il quadrato del lato opposto* AB *sarà maggiore della somma dei quadrati dei lati, che comprendono l'angolo* C; *e se si abbassi* AD *perpendicolare sopra* BC, *la differenza sarà eguale al doppio del rettangolo* $BC\times CD$; *talmente che si avrà* $AB^2=AC^2+BC^2+2BC\times CD$.

La perpendicolare non può cadere dentro del triangolo, poichè se cadesse, per esempio, in E, il triangolo ACE avrebbe ad un tempo stesso l'angolo retto E, e l'angolo ottuso C, il che è impossibile (371): essa dunque cade al di fuori, e si ha $BD=BC+CD$. Di qui resulta (406) $BD^2=BC^2+CD^2+2BC\times CD$. Aggiungendo da ambe le parti AD^2, e facendo le riduzioni, come nel Teorema precedente, se ne conchiuderà $AB^2=BC^2+AC^2+2BC\times CD$.

Scolio. Non v'è che il triangolo rettangolo, in cui la somma dei quadrati di due lati sia eguale al quadrato del terzo; poichè, se l'angolo compreso da questi lati è acuto, la somma de' loro quadrati sarà maggiore del quadrato del lato opposto; se è ottuso, essa sarà minore.

PROPOSIZIONE XIV.

412. Teorema. *In un triangolo qualunque* ABC (Fig. 112) *se si conduce dal vertice al mezzo della base la linea retta* AE, *dico che si avrà*

$$AB^2+AC^2=2AE^2+2BE^2.$$

Abbassate la perpendicolare AD sulla base BC; il triangolo AEC darà pel Teorema XII

$$AC^2=AE^2+EC^2-2EC\times ED.$$

Il triangolo ABE darà pel Teorema XIII

$$AB^2=AE^2+EB^2+2EB\times ED.$$

Dunque, sommando ed osservando che $EB=EC$, si avrà

$$AB^2+AC^2=2AE^2+2EB^2.$$

Corollario. Dunque *in ogni parallelogrammo la somma dei quadrati dei lati è eguale alla somma dei quadrati delle diagonali.*

Poichè le diagonali AC, BD (Fig. 113) si tagliano scambievolmente in due parti eguali al punto E (376); così il triangolo ABC dà

$$AB^2+BC^2=2AE^2+2BE^2.$$

Il triangolo ADC dà parimente

$$AD^2+DC^2=2AE^2+2DE^2.$$

Sommando membro con membro, e osservando che BE=DE, si avrà

$$AB^2+AD^2+DC^2+BC^2=4AE^2+4DE^2.$$

Ma $4AE^2$ è il quadrato di 2AE, o di AC; $4DE^2$ è il quadrato di BD; dunque la somma de' quadrati de' lati è eguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

PROPOSIZIONE XV.

413. Teorema. *La linea* DE (Fig. 114), *condotta parallelamente alla base d'un triangolo* ABC, *divide i lati* AB, AC *proporzionalmente in modo che si ha* AD : DB : : AE : EC.

Tirate BE e DC; i due triangoli BDE, DEC hanno la medesima base DE; essi hanno pure la medesima altezza, poichè i vertici B e C sono situati sopra una parallela alla base; dunque questi triangoli sono equivalenti (400).

I triangoli ADE, BDE, di cui il vertice comune è E, hanno la medesima altezza, e stanno perciò fra loro come le basi AD, DB (404), onde si ha

ADE : BDE : : AD : DB.

I triangoli ADE, DEC, di cui il vertice comune è D, hanno pure la medesima altezza, e stanno fra loro come le basi AE, EC; dunque

ADE : DEC : : AE : EC.

Ma il triangolo BDE=DEC; dunque a motivo del rapporto comune in queste due proporzioni, se ne conchiuderà

AD : DB : : AE : EC.

Corollario I. Di qui risulta *componendo* (137) AD+DB : AD : : AE+EC : AE, oppure AB : AD : : AC : AE, e così pure AB : BD : : AC : CE.

II. Se tra due rette AB, CD (Fig. 115) *si conducono quante si vogliano parallele* AC, EF, GH, BD, *ec.*, *queste rette saranno tagliate proporzionalmente, ed avremo* AE : CF : : EG : FH : : GB : HD : : ec.

Perchè, sia O il punto di concorso delle rette AB, CD, nel triangolo OEF, ove la linea AC è condotta parallelamente alla base EF, si avrà OE : AE : : OF : CF, oppure OE : OF : : AE : CF. Nel triangolo OGH si avrà similmente OE : EG : : OF : FH, ovvero OE : OF : : EG : FH : dunque, a cagione del rapporto comune OE : OF, queste due proporzioni danno AE : CF : : EG : FH. Si dimostrerà nello stesso modo che EG : FH : : GB : HD, e così di seguito; dunque le linee AB, CD sono tagliate proporzionalmente dalle parallele EF, GH, ec.

PROPOSIZIONE XVI.

414. Teorema. *Viceversa, se i lati* AB, AC (Fig. 116) *sono tagliati proporzionalmente dalla linea* DE, *talmente che si abbia* AD : DB : : AE : EC, *dico che la linea* DE *sarà parallela alla base* BC.

Poichè, se DE non è parallela a BC, supponiamo che sia la DO; allora,

secondo il Teorema precedente, si avrà AD : BD : : AO : OC. Ma, per ipotesi, AD : DB : : AE : EC; dunque si avrebbe AO : OC : : AE : EC, proporzione impossibile, poichè da una parte l'antecedente AE è maggiore di AO, e dall'altra il conseguente EC è minore di OC: dunque la parallela a BC condotta pel punto D non può differir da DE; dunque DE è questa parallela.

Scolio. La medesima conclusione avrebbe luogo se si supponesse la proporzione AB : AD : : AC : AE. Poichè questa proporzione darebbe AB—AD : AD : : AC—AE : AE, ovvero BD : AD : : CE : AE.

PROPOSIZIONE XVII.

415. Teorema. *La linea retta* AD (Fig. 117), *che divide in due parti eguali l'angolo* BAC *d'un triangolo, dividerà la base* BC *in due segmenti* BD, DC *proporzionali ai lati adiacenti* AB, AC; *talmente che si avrà* BD : DC : : AB : AC.

Pel punto C conducete CE parallela ad AD fintantochè incontri il lato BA prolungato.

Nel triangolo BCE la linea AD è parallela alla base CE, onde si ha la proporzione (413)

BD : DC : : AB : AE.

Ma il triangolo ACE è isoscele, perchè, a cagione delle parallele AD, CE, l'angolo ACE=DAC, e l'angolo AEC=BAD: ora, per supposizione, DAC=BAD; dunque l'angolo ACE=AEC, ed in conseguenza AE=AC (357); sostituendo dunque AC in vece di AE nella proporzione precedente, si avrà

BD : DC : : AB : AC.

PROPOSIZIONE XVIII.

416. Teorema. *Due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali, e son simili.*

Siano (Fig. 119) ABC, CDE due triangoli, che hanno gli angoli respettivamente eguali, cioè BAC=CDE, ABC=DCE, e ACB=DEC, dico che i lati omologhi, o adiacenti agli angoli eguali saranno proporzionali; talmente che si avrà BC : CE : : AB : CD : : AC : DE.

Situate i lati omologhi BC, CE nella medesima direzione, e prolungate i lati BA, ED finchè s'incontrino in F.

Poichè BCE è una linea retta, e di più l'angolo BCA=CED, ne segue che AC è parallela a DE. Parimente, poichè l'angolo ABC=DCE, la linea AB è parallela a DC; dunque la Figura ACDF è un parallelogrammo.

Nel triangolo BFE la linea AC è parallela alla base FE, onde si ha BC : CE : : BA : AF (413). In vece di AF ponendo la sua eguale CD, si avrà

BC : CE : : BA : CD.

Nel medesimo triangolo BFE, se si riguardi BF come la base, CD è una parallela a questa base, e si ha la proporzione BC : CE : : FD : DE. In vece di FD mettendo la sua eguale AC, si avrà

BC : CE : : AC : DE.

Finalmente da queste due proporzioni, che contengono il medesimo rapporto BC:CE, si può concludere

BC : CE : : AB : CD : : AC : DE.

Dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE hanno i lati omologhi proporzionali: ma, seguendo la Definizione II.ª, due Figure son simili quando hanno ad un tempo stesso gli angoli respettivamente eguali, ed i lati omologhi proporzionali; dunque i triangoli equiangoli BAC, CDE son due Figure simili.

Corollario. Affinchè due triangoli siano simili basta che abbiano due angoli respettivamente eguali, perchè allora il terzo sarà eguale da ambe le parti, e i due triangoli saranno equiangoli.

Scolio. Osservate che nei triangoli simili i lati omologhi sono opposti ad angoli eguali; così essendo l'angolo ACB eguale a DEC, il lato AB è omologo a DC; medesimamente AC e DE sono omologhi, perchè sono opposti agli angoli eguali ABC, DCE: essendo riconosciuti i lati omologhi, si formano facilmente le proporzioni

AB : DC : : AC : DE : : BC : CE.

PROPOSIZIONE XIX.

417. Teorema. *Due triangoli, che hanno tutti i lati omologhi proporzionali, sono equiangoli, e perciò simili.*

Supponiamo (Fig. 120) che si abbia BC:EF::AB:DE::AC:DF, dico che i triangoli ABC, DEF avranno gli angoli eguali, cioè A=D, B=E, C=F.

Fate al punto E l'angolo FEG=B, ed al punto F l'angolo EFG=C, il terzo G sarà eguale al terzo A; e i due triangoli ABC, EFG saranno equiangoli; dunque si avrà pel Teorema precedente BC:EF::AB:EG; ma, per supposizione, BC:EF::AB:DE; dunque EG=DE. Si avrà ancora pel Teorema medesimo BC:EF::AC:FG; ora si ha per supposizione, BC:EF::AC:DF; dunque FG=DF; dunque i triangoli EGF, DEF hanno i tre lati respettivamente eguali; dunque sono eguali. Ma, per costruzione, il triangolo EGF è equiangolo al triangolo ABC; dunque anche i triangoli DEF, ABC sono equiangoli e simili.

Scolio I. Si vede da queste due ultime Proposizioni che nei triangoli l'eguaglianza degli angoli è una conseguenza della proporzionalità dei lati, e reciprocamente; in modo che una di queste condizioni serve per assicurar la similitudine dei triangoli. Non è lo stesso nelle Figure di più di tre lati; perchè, cominciando sino da'quadrilateri, si può, senza cambiar gli angoli, alterare la proporzione de'lati, o senza alterare i lati cangiare gli angoli; così la proporzione de'lati non può essere una conseguenza dell'eguaglianza degli angoli; nè viceversa. Si vede, per esempio, che conducendo (Fig. 121) EF parallela a BC, gli angoli del quadrilatero AEFD sono eguali a quelli del quadrilatero ABCD; ma la proporzione de'lati è differente: del pari, senza cangiar di lun-

ghezza *i* quattro lati AB, BC, CD, AD, si può avvicinare o allontanare il punto B dal punto D, il che altererà gli angoli.

Scolio II. Le due Proposizioni precedenti, che propriamente ne fanno una sola, unite a quella del quadrato dell'ipotenusa, sono le proposizioni le più importanti, e le più feconde della Geometria; bastano quasi esse sole a tutte le applicazioni, ed alla risoluzione di tutti i Problemi: la ragione si è che tutte le Figure posson dividersi in triangoli, ed un triangolo qualunque in due triangoli rettangoli. Perciò le proprietà generali dei triangoli racchiudono implicitamente quelle di tutte le Figure rettilinee.

PROPOSIZIONE XX.

418. Teorema. *Due triangoli, che hanno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali, son simili.*

Sia (Fig. 122) l'angolo A=D, e supponiamo che si abbia AB : DE :: AC : DF; dico che il triangolo ABC è simile a DEF.

Prendete AG=DE, e conducete GH parallela a BC; l'angolo AGH sarà eguale all'angolo ABC, ed il triangolo AGH sarà equiangolo al triangolo ABC; si avrà dunque AB : AG :: AC : AH. Ma, per supposizione, AB : DE :: AC : DF, e per costruzione AG=DE; dunque AH=DF. I due triangoli AGH, DEF hanno dunque un angolo eguale compreso fra lati eguali; essi dunque sono eguali. Ora il triangolo AGH è simile ad ABC; dunque DEF è pur simile ad ABC.

PROPOSIZIONE XXI.

419. Teorema. *Due triangoli, che hanno i lati omologhi paralleli, o che gli hanno respettivamente perpendicolari, son simili.*

Poichè 1.° se il lato AB (Fig. 123) è parallelo a DE, e BC ad EF, l'angolo ABC sarà eguale a DEF; se di più AC è parallelo a DF, l'angolo ACB sarà eguale a DFE, e così BAC a EDF; dunque i triangoli ABC, DEF sono equiangoli; dunque son simili.

2.° Sia il lato DE (Fig. 124) perpendicolare ad AB, e il lato DF ad AC; nel quadrilatero AIDH i due angoli I e H saranno retti; i quattro angoli equivalgono insieme a quattro angoli retti (371), dunque i due rimanenti IAH, IDH equivalgono a due angoli retti. Ma i due angoli EDF, IDH equivalgono pure a due angoli retti: dunque l'angolo EDF e l'angolo IAH, ossia BAC, hanno il medesimo supplemento e perciò sono eguali. Nello stesso modo si dimostrerà che l'angolo DFE=C, e DEF=B; dunque i due triangoli ABC, DEF, che hanno i lati respettivamente perpendicolari, sono equiangoli e simili.

Scolio. Nel caso dei lati paralleli i lati omologhi sono i lati paralleli; ed in quello de'lati perpendicolari lo sono i lati perpendicolari. Così, in quest'ultimo caso, DE è omologo ad AB, DF ad AC, ed EF a BC.

Il caso dei lati perpendicolari potrebbe offrire una situazione relativa de'due triangoli differente da quella, che è supposta nella Fig. 124; ma l'egua-

glianza degli angoli respettivi si dimostrerebbe sempre o con dei quadrilateri, come AIDH, di cui due angoli son retti, o col paragone di due triangoli, i quali con degli angoli opposti al vertice avrebbero ciascuno un angolo retto: d'altronde si potrebbe sempre supporre che si fosse costrutto dentro del triangolo ABC un triangolo DEF, i di cui lati fossero paralleli a quelli del triangolo paragonato ad ABC; ed allora la dimostrazione rientrerebbe nel caso della Figura 124.

PROPOSIZIONE XXII.

420. Teorema. *Le linee* AF, AG *ec.* (Fig. 125) *condotte a piacimento dal vertice di un triangolo dividono proporzionalmente la base* BC, *e la sua parallela* DE; *talmente che si ha* DI : BF : : IK : FG : : KL : GH *ec.*

Poichè, siccome DI è parallela a BF, il triangolo ADI è equiangolo ad ABF, e si ha la proporzione DI : BF : : AI : AF. Parimente, essendo IK parallela a FG, si ha AI : AF : : IK : FG. Dunque, a cagione del rapporto comune AI : AF, si avrà DI : BF : : IK : FG. Si troverà similmente IK : FG : : KL : GH ec. dunque la linea DE è divisa nei punti I, K, L come lo è la base BC nei punti F, G, H.

Corollario. Dunque, se BC fosse divisa in parti eguali nei punti F, G, H, la parallela DE sarebbe divisa parimente in parti eguali nei punti I, K, L.

PROPOSIZIONE XXIII.

421. Teorema. *Se dal vertice dell'angolo retto* A (Fig. 126) *d'un triangolo rettangolo si abbassi la perpendicolare* AD *sull'ipotenusa*, 1.° *I due triangoli parziali* ABD, ADC *saranno simili fra di loro, ed al triangolo totale* ABC. 2.° *Ogni lato* AB, *o* AC *sarà medio proporzionale fra l'ipotenusa* BC, *ed il segmento adiacente* BD, *o* DC. 3.° *La perpendicolare* AD *sarà media proporzionale fra i due segmenti* BD, DC.

Poichè 1.° il triangolo BAD ed il triangolo BAC hanno l'angolo comune B; di più l'angolo retto BDA è eguale all'angolo retto BAC; dunque il terzo angolo BAD dell'uno è eguale al terzo C dell'altro; dunque questi due triangoli sono equiangoli, e perciò simili. Si dimostrerà parimente che il triangolo DAC è simile al triangolo BAC; dunque 1.° i tre triangoli sono equiangoli e simili fra di loro.

2.° Poichè il triangolo BAD è simile al triangolo BAC, i loro lati omologhi sono proporzionali. Ora il lato BD nel triangolo piccolo è omologo a BA nel grande, perchè sono opposti ad angoli eguali BAD, BCA; l'ipotenusa BA del piccolo è omologa all'ipotenusa BC del grande; dunque si può formare la proporzione BD : BA : : BA : BC. Si avrebbe nella stessa maniera DC : AC : : AC : BC. Dunque 2.° ognuno dei lati AB, AC è medio proporzionale fra l'ipotenusa, e il segmento adiacente a questo lato.

3.° Finalmente la similitudine dei triangoli ABD, ADC dà, paragonando i

lati omologhi, BD : AD : : AD : DC; dunque 3.° la perpendicolare AD è media proporzionale tra i segmenti BD, DC dell' ipotenusa.

Scolio. La proporzione BD : AB : : AB : BC dà, uguagliando il prodotto degli estremi a quello de' medj, $AB^2 = BD \times BC$; si ha medesimamente $AC^2 = DC \times BC$; dunque $AB^2 + AC^2 = BD \times BC + DC \times BC$: il secondo membro è la medesima cosa che $(BD + DC) \times BC$, e si riduce a $BC \times BC$ o BC^2; dunque si ha $AB^2 + AC^2 = BC^2$; dunque il quadrato fatto sopra l'ipotenusa BC è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati AB, AC. Ritorniamo così alla Proposizione del quadrato dell'ipotenusa per una strada differentissima da quella, che avevamo seguitata; d'onde si vede che, a parlar propriamente, la Proposizione del quadrato dell' ipotenusa è una conseguenza della proporzionalità dei lati nei triangoli equiangoli. Laonde le Proposizioni fondamentali della Geometria si riducono, per così dire, a questa sola, cioè, che i triangoli equiangoli hanno i loro lati omologhi proporzionali.

Accade spesso, come n'abbiam veduto adesso un esempio, che tirando delle conseguenze da una o più Proposizioni, si ricade su delle Proposizioni già dimostrate. In generale ciò, che caratterizza particolarmente i Teoremi di Geometria, e dà una prova invincibile della loro certezza, si è che combinandoli insieme in una maniera qualunque, purchè si ragioni giustamente, si cade sempre sopra resultamenti esatti. Non avverrebbe così se qualche Proposizione fosse falsa, o non fosse vera che press' a poco; accaderebbe spesso che, per mezzo della combinazione delle Proposizioni fra loro, l'errore si accrescerebbe, e diventerebbe sensibile. Si vedono esempj di ciò in tutte le dimostrazioni, dove ci serviamo della *riduzione all' assurdo.* Tali dimostrazioni, in cui si ha la mira di provare che due quantità sono eguali, consistono nel far vedere che, se si ammettesse fra loro la minima disuguaglianza, ne risulterebbe per mezzo della serie dei ragionamenti un'assurdità manifesta e palpabile; d'onde si rimane costretti a conchiudere che quelle due quantità sono eguali.

Corollario. Se da un punto A (Fig. 127) della circonferenza si conducono le due corde AB, AC alle estremità del diametro BC, il triangolo BAC sarà rettangolo in A (395); dunque 1.° *la perpendicolare* AD *è media proporzionale fra i due segmenti del diametro* BD, DC, ovvero, il che torna lo stesso, il quadrato AD^2 è eguale al rettangolo $BD \times DC$.

2.° *La corda* AB *è media proporzionale fra il diametro* BC, *ed il segmento adiacente* BD, oppure, il che torna lo stesso, $AB^2 = BD \times BC$. Si ha parimente $AC^2 = CD \times BC$; dunque $AB^2 : AC^2 : : BD : DC$; e se si paragona AB^2 a BC^2 si avrà $AB^2 : BC^2 : : BD : BC$; si avrebbe pure $AC^2 : BC^2 : : DC : BC$. Questi rapporti dei quadrati dei lati sì fra loro, che col quadrato dell' ipotenusa, si sono già dati nei Corollarj III. e IV. della Proposizione XI.

PROPOSIZIONE XXIV.

422. **Teorema.** *Due triangoli, che hanno un angolo eguale, stanno fra loro come i rettangoli dei lati, che comprendono l' angolo eguale. Così il trian-*

golo ABC (Fig. 128) *sta al triangolo* ADE *come il rettangolo* $AB \times AC$ *sta al rettangolo* $AD \times AE$.

Tirate BE; i due triangoli ABE, ADE, il di cui vertice comune è in E, hanno la medesima altezza, e stanno fra loro come le basi AB, AD (404); dunque

$$ABE : ADE :: AB : AD.$$

Si ha parimente

$$ABC : ABE :: AC : AE.$$

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, ed omettendone il termine comune ABE, si avrà

$$ABC : ADE :: AB \times AC : AD \times AE.$$

Corollario. Dunque i due triangoli sarebbero equivalenti se il rettangolo $AB \times AC$ fosse eguale al rettangolo $AD \times AE$, o se si avesse $AB : AD :: AE : AC$; lo che avrebbe luogo se la linea DC fosse parallela a BE.

PROPOSIZIONE XXV.

423. Teorema. *Due triangolo simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Sia (Fig. 122) l'angolo A=D, e l'angolo B=E; primieramente a cagione degli angoli eguali A e D, si avrà per la Proposizione precedente

$$ABC : DEF :: AB \times AC :: DE \times DF.$$

D'altronde abbiamo, a causa della similitudine dei triangoli;

$$AB : DE :: AC : DF.$$

E, se si moltiplica questa proporzione termine a termine per la proporzione identica

$$AC : DF :: AC : DF,$$

ne risulterà

$$AB \times AC : DE \times DF :: AC^2 : DF^2.$$

Dunque

$$ABC : DEF :: AC^2 : DF^2.$$

Dunque due triangoli simili ABC, DEF stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi AC, DF o come i quadrati di altri due lati omologhi qualunque.

PROPOSIZIONE XXVI.

424. Teorema. *Due poligoni simili sono composti d'un medesimo numero di triangoli, simili respettivamente, e similmente disposti.*

Nel poligono ABCDE (Fig. 129) conducete dal vertice d'uno stesso angolo A le diagonali AC, AD agli altri angoli. Nell'altro poligono FGHIK conducete similmente dall'angolo F omologo ad A le diagonali FH, FI agli altri angoli.

Poichè i poligoni sono simili, l'angolo ABC è eguale al suo omologo FGH, e di più i lati AB, BC sono proporzionali ai lati FG, GH; talmente che si ha $AB : FG :: BC : GH$. Da ciò segue che i triangoli ABC, FGH hanno un angolo eguale compreso tra lati proporzionali; dunque essi son simili (418); dunque l'angolo BCA è eguale a GHF. Essendo tolti questi angoli eguali da-

gli angoli eguali BCD, GHI, i resti ACD, FHI saranno eguali: ma poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si ha AC:FH::BC:GH; d'altronde, a cagione della similitudine de' poligoni, BC:GH::CD:HI; dunque AC:FH:: CD:HI; ma si è già veduto che l'angolo ACD=FHI; dunque i triangoli ACD, FHI hanno un angolo eguale compreso fra lati proporzionali; dunque son simili. Si può continuare medesimamente a dimostrar la similitudine dei triangoli susseguenti, qualunque sia il numero dei lati dei poligoni proposti: dunque due poligoni simili sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili e similmente disposti.

Scolio. La Proposizione inversa è ugualmente vera: ***Se due poligoni sono composti d'un medesimo numero di triangoli simili e similmente disposti, questi due poligoni saranno simili.***

Poichè la similitudine dei triangoli respettivi darà l'angolo ABC=FGH, BCA=GHF, ACD=FHI; dunque BCD=GHI; così pure CDE=HIK, ec. Di più si avrà AB : FG : : BC : GH : : AC : FH : : CD : HI, ec.; dunque i due poligoni hanno gli angoli eguali, ed i lati proporzionali; dunque son simili.

PROPOSIZIONE XXVII.

425. Teorema. ***I contorni, o perimetri de' poligoni simili stanno come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi medesimi lati.***

Poichè 1.° avendosi (Fig. 129), per la natura delle Figure simili, AB : FG : : BC : GH : : CD : HI ec., si può conchiudere da questa serie di rapporti eguali (138), la somma degli antecedenti AB+BC+CD ec., perimetro della prima Figura, sta alla somma de' conseguenti FG+GH+HI ec., perimetro della seconda Figura, come un antecedente sta al suo conseguente, ovvero come il lato AB sta al suo omologo FG.

2.° Poichè i triangoli ABC, FGH sono simili, si ha (123) ABC:FGH:: AC^2:FH^2; parimente, i triangoli simili ACD, FHI danno ACD:FHI::AC^2: FH^2; dunque, a motivo del rapporto comune AC^2:FH^2, si ha

ABC : FGH : : ACD : : FHI.

Con un ragionamento simile si troverebbe

ACD : FHI : : ADE : FIK;

e così di seguito, se vi fosse un maggior numero di triangoli. Da questa serie di rapporti eguali si conchiuderà: la somma degli antecedenti ABC+ACD+ADE, o l'area del poligono ABCDE, sta alla somma dei conseguenti FGH+FHI+FIK, o all'area del poligono FGHIK; come un antecedente ABC sta al suo conseguente FGH, o come AB^2 sta a FG^2; dunque le superficie dei poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Corollario. Se si costruiscono tre Figure simili, i di cui lati omologhi siano eguali ai tre lati d'un triangolo rettangolo, l'area della Figura fatta sul maggior lato sarà eguale alla somma delle aree delle altre due, poichè queste tre Figure sono proporzionali ai quadrati dei loro lati omologhi; ora il

quadrato dell'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati; dunque ec.

PROPOSIZIONE XXVIII.

426. Teorema. *Le parti di due corde* AB, CD (Fig. 130), *che si tagliano dentro d'un circolo, sono reciprocamente proporzionali, vale a dire che si ha*
AO : DO : : CO : OB.

Tirate AC e BD: nei triangoli ACO, BOD gli angoli in O sono eguali, come opposti al vertice; l'angolo A è eguale all'angolo D, perchè sono iscritti nel medesimo segmento (395); per la medesima ragione l'angolo C=B; dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione
AO : DO : : CO : OB.

Corollario. Si ricava da ciò AO×OB=DO×CO; dunque il rettangolo delle due parti d'una delle corde è eguale al rettangolo delle due parti dell'altra.

PROPOSIZIONE XXIX.

427. Teorema. *Se da uno stesso punto* O (Fig. 131) *preso fuori del circolo si conducono le secanti* OB, OC, *terminate all'arco concavo* BC, *le secanti intere saranno reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne, cioè si avrà la proporzione* OB : OC : : OD : OA.

Poichè, tirando AC e BD, i triangoli OAC, OBD hanno l'angolo O comune; di più l'angolo B=C (395); dunque questi triangoli sono simili, e i lati omologhi danno la proporzione OB : OC : : OD : OA.

Corollario. Dunque il rettangolo OA×OB è eguale al rettangolo OC ×OD.

Scolio. Si può osservare che questa Proposizione ha molta analogia colla precedente, e che ne differisce soltanto perchè le due corde AB, CD, in vece di tagliarsi dentro del circolo, si tagliano al di fuori. La proposizione seguente può ancora esser riguardata come un caso particolare di quest'ultima.

PROPOSIZIONE XXX.

428. Teorema. *Se da uno stesso punto* O (Fig. 132) *preso fuori del circolo si conduce una tangente* OA, *ed una secante* OC *la tangente sarà media proporzionale fra la secante e la sua parte esterna; talmente che si avrà* OC : OA : : OA : OD; *ovvero, il che torna lo stesso,* OA^2=OC×OD.

Poichè, tirando AD ed AC, i triangoli OAD, OAC hanno l'angolo O comune; di più l'angolo OAD formato da una tangente e da una corda (396) ha per misura la metà dell'arco AD, e l'angolo C ha la medesima misura; dunque l'angolo OAD=C; dunque i due triangoli sono simili, e si ha la proporzione OC : OA : : OA : OD, che dà OA^2=OC×OD.

(*) PROPOSIZIONE XXXI.

429. Teorema. *In un triangolo* ABC (Fig. 133) *se si divide l'angolo* A *in due parti eguali colla linea* AD, *il rettangolo dei lati* AB, AC *sarà eguale al rettangolo dei segmenti* DB, DC, *più il quadrato della secante* AD (*a*).

Fate passare una circonferenza per i tre punti A, B, C; prolungate AD fino alla stessa circonferenza, e tirate CE.

Il triangolo BAD è simile al triangolo EAC; poichè, per supposizione, l'angolo BAD=EAC; di più l'angolo B=E, avendo ambedue per misura la metà dell'arco AC; dunque questi triangoli sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione $BA : AE :: AD : AC$. Quindi resulta $BA \times AC = AE \times AD$; ma $AE = AD + DE$, e moltiplicando da ambe le parti per AD, si ha $AE \times AD = AD^2 + AD \times DE$; d'altronde $AD \times DE = BD \times DC$ (426), dunque finalmente $BA \times AC = AD^2 + BD \times DC$.

(*) PROPOSIZIONE XXXII.

430. Teorema. *In un triangolo* ABC (Fig. 134) *il rettangolo dei due lati* AB, AC *è eguale al rettangolo compreso tra il diametro* CE *del circolo circoscritto e la perpendicolare* AD *abbassata sul terzo lato* BC.

Poichè, tirando AE, i triangoli ABD, AEC sono rettangoli, l'uno in D, l'altro in A; di più l'angolo B=E; dunque questi triangoli sono simili, e danno la proporzione $AB : CE :: AD : AC$; donde resulta $AB \times AC = CE \times AD$.

Corollario. Se si moltiplicano queste quantità eguali per la medesima quantità BC, si avrà $AB \times AC \times BC = CE \times AD \times BC$. Ora $AD \times BC$ è il doppio della superficie del triangolo (404); dunque *il prodotto dei tre lati d'un triangolo è eguale alla sua superficie moltiplicata per il doppio del diametro del circolo circoscritto.*

Il prodotto di tre linee si chiama talora un *solido*, per una ragione che si vedrà in seguito. Il suo valore facilmente si concepisce immaginando che le linee siano ridotte in numeri, e moltiplicando i numeri di cui si tratta.

Scolio. Si può dimostrar pure che *la superficie d'un triangolo è eguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.*

Poichè (Fig. 87) i triangoli AOB, BOC, AOC, che hanno il loro vertice comune in O, han per altezza comune il raggio del circolo iscritto; dunque la somma di questi triangoli sarà eguale alla somma delle basi AB, BC, AC moltiplicata per la metà del raggio OD; dunque la superficie del triangolo ABC è eguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.

(*a*) Questa proposizione, come pure tutte quelle che si incontreranno contrassegnate con (*) possono tralasciarsi senza verun inconveniente da chi vuol limitarsi ai semplici elementi.

(*) PROPOSIZIONE XXXIII.

431. **Teorema.** *In ogni quadrilatero* ABCD (Fig. 135) *iscritto nel circolo, il rettangolo delle due diagonali* AC, BD *è eguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti; talmente che si ha*

$$AC\times BD=AB\times CD+AD\times BC.$$

Prendete l'arco CO=AD, e tirate BO, che incontri la diagonale AC in I.

L'angolo ABD=CBI, poichè l'uno ha per misura la metà di AD, e l'altro la metà di CO eguale ad AD. L'angolo ADB=BCI, perchè sono iscritti nel medesimo segmento AOB; dunque il triangolo ABD è simile al triangolo IBC, e si ha la proporzione AD : CI : : BD : BC; donde resulta $AD\times BC=CI\times BD$. Dico adesso che il triangolo ABI è simile al triangolo BDC, perchè essendo l'arco AD eguale a CO, se si aggiunge da ambe le parti OD, si avrà l'arco AO=DC; dunque l'angolo ABI=DBC: di più l'angolo BAI=BDC, perchè sono iscritti nel segmento medesimo; dunque i triangoli ABI, DBC sono simili, ed i lati omologhi danno la proporzione AB : BD : : AI : CD; donde resulta $AB\times CD=AI\times BD$.

Aggiungendo i due resultati trovati, e osservando che $AI\times BD+CI\times BD=(AI+CI)\times BD=AC\times BD$, si avrà $AD\times BC+AB\times CD=AC\times BD$.

Scolio. Si può dimostrare nella stessa maniera un altro Teorema sul quadrilatero iscritto.

Il triangolo ABD simile a BIC dà pure la proporzione BD : BC : : AB : BI, donde resulta $BI\times BD=BC\times AB$. Se si tira CO, il triangolo ICO simile ad ABI sarà simile a BDC, e darà la proporzione BD : CO : : DC : OI, donde resulta $OI\times BD=CO\times DC$, d'onde a cagione di CO=AD, $OI\times BD=AD\times DC$. Aggiungendo i due resultati, e osservando che $BI\times BD+OI\times BD$ si riduce a $BO\times BD$, si avrà $BO\times BD=AB\times BC+AD\times DC$.

Se si fosse preso BP=AD, e si fosse tirata CKP, si sarebbe trovato con dei ragionamenti simili

$$CP\times CA=AB\times AD+BC\times CD.$$

Ma essendo l'arco BP eguale a CO, se si aggiunge BC da ambe la parti, si avrà l'arco CBP=BCO; dunque la corda CP è eguale alla corda BO, e per conseguenza i rettangoli $BO\times BD$ e $CP\times CA$ stanno fra loro come BD sta a CA; dunque

$$BD : CA : : AB\times BC+AD\times DC : AD\times AB+BC\times CD.$$

Dunque *le due diagonali d'un quadrilatero iscritto stanno fra loro come le somme dei rettangoli dei lati adiacenti alle loro estremità.*

Questi due teoremi posson servire per trovare le diagonali quando si conoscono i lati.

(*) PROPOSIZIONE XXXIV.

432. **Teorema.** *Sia* P (Fig. 136) *un punto dato dentro il circolo sul raggio,* AC, *e sia preso un punto* Q *al di fuori sul prolungamento dello stesso*

raggio talmente che si abbia CP : CA : : CA : CQ; *se da un punto qualunque* M *della circonferenza si conducano ai due punti* P *e* Q *le rette* MP, MQ, *dico che queste rette staranno per tutto nel medesimo rapporto, e che si avrà sempre* MP : MQ : : AP : AQ.

Poichè si ha per supposizione CP : CA : : CA : CQ. mettendo CM in vece di CA, si avrà CP : CM : : CM : CQ; dunque i triangoli CPM CQM hanno un angolo eguale C compreso fra lati proporzionali, dunque son simili; dunque il terzo lato MP sta al terzo MQ come CP sta a CM o CA. Ma la proporzione CP · CA : : CA : CQ dà, *dividendo*, CP : CA : : CA—CP : CQ—CA, o CP : CA : : AP : AQ; dunque MP : MQ : : AP : AQ.

Problemi relativi al Libro III.

433. Problema I.° *Dividere una linea retta data in quante parti eguali si voglia, ovvero in parti proporzionali a linee date.*

1.° Sia proposto di divider la linea AB (Fig. 137) in cinque parti eguali; per l'estremità A si condurrà la linea indefinita AG, e prendendo AC d'una grandezza qualunque si porterà AC cinque volte sopra AG. Si uniranno l'ultimo punto di divisione G, e l'estremità B colla linea retta GB; poi si condurrà CI parallela a GB; dico che AI sarà la quinta parte della linea AB e che, portando AI cinque volte sopra AB, la linea AB sarà divisa in cinque parti eguali.

Poichè, siccome CI è parallela a GB, i lati AG, AB son tagliati proporzionalmente In C ed I (411). Ma AC è la quinta parte di AG; dunque AI è la quinta parte di AB.

2.° Sia proposto di dividere la linea AB (Fig. 138) in parti proporzionali alle linee rette date P, Q, R. Dall'estremità A si tirerà l'indefinita AG; si prenderanno AC=P, CD=Q, DE=R; si uniranno l'estremità E e B, e pei punti C e D si condurranno CI, DK parallele ad EB; dico che la linea AB sarà divisa in parti AI, IK, KB proporzionali alle linee date P, Q, R.

Poichè, a motivo delle parallele CI, DK, EB, le parti AI, IK, KB son proporzionali alle parti AC, CD, DE, e, per costruzione, queste ultime sono eguali alle linee date P, Q, R.

Problema II.° *Trovare una quarta proporzionale a tre linee date*, A, B, C.

Tirate (Fig. 139) le due linee indefinite DE, DF sotto un angolo qualunque. Sopra DE prendete DA=A e DB=B; sopra DF prendete DC=C; tirate AC, e per il punto B conducete BX parallela ad AC; dico che DX sarà la quarta proporzionale cercata: poichè, siccome BX è parallela ad AC, si ha la proporzione DA : DB : : DC : DX; ora, i tre primi termini di questa proporzione sono eguali alle tre linee date; dunque DX è la quarta proporzionale richiesta.

Corollario. Si troverà similmente una terza proporzionale alle due linee date A, B; poichè essa sarà la stessa che la quarta proporzionale alle tre linee A, B, C.

Problema III.° *Trovare una media proporzionale fra due rette date* A *e* B.

Sopra una linea indefinita DF (Fig. 140) prendete DE=A ed EF=B; sulla linea totale DF, come diametro, descrivete la mezza-circonferenza DGF; dal punto E inalzate sul diametro la perpendicolare EG, che incontri la circonferenza in G; dico che EG sarà la media proporzionale richiesta.

Poichè la perpendicolare GE abbassata da un punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale fra i due segmenti del diametro stesso DE, EF (421): or questi segmenti sono eguali alle linee date A e B. Dunque ec.

Problema IV.° *Dividere la linea data* AB (Fig 141) *in due parti, di maniera che la maggiore sia media proporzionale tra la linea intera e l'altra parte.*

All'estremità B della linea AB alzate su questa la perpendicolare BC eguale alla metà di AB: dal punto C, come centro e col raggio CB descrivete una circonferenza; tirate AC, che taglierà la circonferenza in D e prendete AF=AD; dico che la linea AB sarà divisa nel punto F nella maniera richiesta. in guisa tale, cioè, che avremo AB : AF : : AF : FB.

Poichè, essendo AB perpendicolare all'estremità del raggio CB, dessa è una tangente; e se si prolunga AC finchè incontri di nuovo la circonferenza in E, si avrà (428) AE : AB : : AB : AD; dunque, *dividendo* (137), AE—AB : AB : : AB—AD : AD. Ma poichè il raggio BC è la metà di AB, il diametro DE è eguale ad AB, e per conseguenza AE—AB=AD=AF; si ha pure, a motivo di AF=AD, AB—AD=FB; dunque AF : AB : : FB : AD, ovvero AF; dunque, *invertendo*, AB : AF : : AF : FB.

Scolia. Questo modo di divisione della linea AB si chiama divisione in *media ed estrema ragione:* se ne vedranno degli usi. Si può frattanto osservare, che la secante AE è divisa in *media ed estrema ragione* nel punto D; imperocchè, a motivo di AB=DE, si ha AE : DE : : DE : AD.

Problema V.° *Per un punto* A (Fig. 142) *dato dentro dell'angolo dato* BCD *tirare la linea* BD *in maniera, che le parti* AB, AD, *comprese tra il punto* A *ed i due lati dell'angolo, siano eguali.*

Pel punto A conducete AE parallela a CD; prendete BE=CE; e pei punti B ed A tirate BAD, che sarà la linea cercata.

Poichè, essendo AE parallela a CD, si ha BE:EC :: BA : AD; ora BE=EC, dunque BA=AD.

Problema VI.° *Fare un quadrato equivalente ad un parallelogrammo, o ad un triangolo dato.*

1.° Sia ABCD (Fig. 143) il parallelogrammo dato, AB la sua base, DE la sua altezza: fra AB e DE cercate una media proporzionale XY (III.°) dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al parallelogrammo ABCD. Poichè si ha per costruzione, AB : XY : : XY : DE; dunque $XY^2=AB\times DE$: ora $AB\times DE$ è la misura del parallelogrammo, XY^2 quella del quadrato; essi dunque sono equivalenti:

2.° Sia ABC (Fig. 144) il triangolo dato, BC la sua base, AD la sua altezza: prendete una media proporzionale fra BC e la metà di AD e sia XY que-

sta media; dico che il quadrato fatto sopra XY sarà equivalente al triangolo ABC.

Poichè, siccome si ha $BC:XY::XY:{}^1/_2AD$, ne risulta $XY^2=BC\times{}^1/_2AD$; dunque il quadrato fatto sopra XY è equivalente al triangolo ABC.

Problema VII.° *Fare sulla linea data* AD (Fig. 145) *un rettangolo* ADEX *equivalente al rettangolo dato* ABFC.

Cercate una quarta proporzionale alle tre linee AD, AB, AC e sia AX questa quarta proporzionale; dico che il rettangolo fatto sopra AD ed AX sarà equivalente al rettangolo ABFC.

Poichè, siccome si ha $AD:AB::AC:AX$, ne risulta $AD\times AX=AB\times AC$: dunque il rettangolo ADEX è equivalente al rettangolo ABFC.

Problema VIII.° *Trovare in linee il rapporto del rettangolo delle due linee date* A e B (Fig. 148) *al rettangolo delle due linee date* C *e* D.

Sia X una quarta proporzionale alle tre linee B, C, D; dico che il rapporto delle due linee A e X sarà uguale a quello dei due rettangoli $A\times B$, $C\times D$.

Poichè, siccome si ha $B:C::D:X$, ne risulta $C\times D=B\times X$; dunque $A\times B:C\times D::A\times B:B\times X::A:X$.

Corollario. Dunque, per avere il rapporto dei quadrati fatti sopra le linee date A e C, cercate una terza proporzionale X alle linee A e C, talmente che si abbia $A:C::C:X$; e voi avrete $A^2:C^2::A:X$.

Problema IX.° *Trovare in linee il rapporto del prodotto delle linee date* A, B, C (Fig. 149) *al prodotto delle tre linee date* P, Q, R.

Alle tre linee date P, A, B cercate una quarta proporzionale X; alle tre linee date C, Q, R cercate parimente una quarta proporzionale Y. Le due linee X, Y staranno fra loro come i prodotti $A\times B\times C$, $P\times Q\times R$.

Poichè, siccome $P:A::B:X$, si ha $A\times B=P\times X$; e moltiplicando da ambe le parti per C, $A\times B\times C=C\times P\times X$. Similmente, siccome $C:Q::R:Y$, ne resulta $Q\times R=C\times Y$; e moltiplicando da ambe le parti per P, si ha $P\times Q\times R=P\times C\times Y$; dunque il prodotto $A\times B\times C$ sta al prodotto $P\times Q\times R$ come $C\times P\times X$ sta a $P\times C\times Y$, o come X sta ad Y.

Problema X.° *Fare un triangolo equivalente ad un poligono dato.*

Sia ABCDE (Fig. 146) il poligono dato. Tirate primieramente la diagonale CE, che separa dal poligono il triangolo CDE; pel punto D conducete DF parallela a CE finchè incontri AE prolungata; tirate CF; ed il poligono ABCDE sarà equivalente al poligono ABCF, che ha un lato di meno.

Poichè i triangoli CDE, CFE hanno la base comune CE, ed essi hanno pure la medesima altezza perchè i loro vertici D, F son situati sopra una linea DF parallela alla base, questi triangoli sono equivalenti. Aggiungendo ad ambe le parti la Figura ABCE, si avrà da una parte il poligono ABCDE e dall'altra il poligono ABCF, che saranno equivalenti.

Si può parimente togliere l'angolo B sostituendo al triangolo ABC il triangolo equivalente AGC, e così il pentagono ABCDE sarà cangiato in un triangolo equivalente GCF.

Lo stesso metodo si applicherà ad ogni altra Figura; poichè, diminuendo ad uno per volta il numero dei lati, si cadrà finalmente sul triangolo equivalente.

Problema XI.° *Fare un quadrato, che sia eguale alla somma o alla differenza di due quadrati dati*

Siano A e B (Fig. 147) i lati dei quadrati dati.

1.° Se bisogna trovare un quadrato eguale alla somma di questi quadrati, tirate le due linee rette indefinite ED, EF ad angolo retto; prendete ED=A ed EG=B; conducete DG; e DG sarà il lato del quadrato cercato.

Poichè, essendo il triangolo DEG rettangolo, il quadrato fatto sopra DG è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra ED ed EG.

2.° Se bisogna trovare un quadrato eguale alla differenza de'quadrati dati, formate parimente l'angolo retto FEH; prendete GE eguale al minore dei lati A e B; dal punto G, come centro e con un raggio GH eguale all'altro lato, descrivete un arco, che tagli EH in H; dico che il quadrato fatto sopra EH sarà eguale alla differenza dei quadrati fatti sopra le linee A e B.

Poichè il triangolo GEH è rettangolo, l'ipotenusa GH=A ed il lato GE=B; dunque il quadrato fatto sopra EH ec.

Scolio. Si può trovare ancora un quadrato eguale alla somma di quanti quadrati si vorrà; poichè la costruzione, che ne riduce due ad un solo, ne ridurrà tre a due, e questi due ad uno e così degli altri. Sarebbe lo stesso se alcuno dei quadrati dovesse esser sottratto dalla somma degli altri.

Problema XII.° *Costruire un quadrato che stia al quadrato dato* ABCD (Fig. 150) *come la linea* M *sta alla linea* N.

Sopra la linea retta indefinita EG prendete EF=M e FG=N; sopra EG, come diametro, descrivete una mezza-circonferenza, e nel punto F alzate sul diametro la perpendicolare FH Dal punto H conducete le corde HG, HE che prolungherete indefinitamente; sulla prima prendete HK eguale al lato AB del quadrato dato, e pel punto K conducete KI parallela ad EG; dico che HI sarà il lato del quadrato richiesto.

Poichè a motivo delle parallele KI, GE, si ha HI : HK : : HE : HG o $HI^2 : HK^2 : : HE^2 : HG^2$; ma nel triangolo rettangolo EHG (421) il quadrato di HE sta al quadrato di HG come il segmento EF sta al segmento FG o come M sta ad N; dunque $HI^2 : HK^2 : : M : N$. Ma HK=AB; dunque il quadrato fatto sopra HI sta al quadrato fatto sopra AB come M sta ad N.

Problema XIII.° *Sul lato* FG (Fig. 129) *omologo ad* AB *descrivere un poligono simile al poligono dato* ABCDE.

Nel poligono dato tirate le diagonali AC, AD; nel punto F fate l'angolo GFH=BAC, e nel punto G l'angolo FGH=ABC; le linee rette FH, GH si taglieranno in H, ed FGH sarà un triangolo simile ad ABC; parimente sopra FH, omologo ad AC, costruite il triangolo FIH simile ad ADC e sopra FI, omologo ad AD, costruite il triangolo FIK simile ad ADE. Il poligono FGHIK sarà il poligono richiesto, cioè simile ad ABCDE. Poichè questi due poligoni son composti d'un medesimo numero di triangoli simili e similmente disposti (424).

Problema XIV.° *Essendo date due Figure simili, costruire una Figura simile, che sia eguale alla loro somma, o alla lor differenza.*

Siano A e B due lati omologhi delle Figure date; cercate un quadrato eguale alla somma o alla differenza dei quadrati fatti sopra A e B; sia X il lato di questo quadrato; X sarà nella Figura cercata il lato omologo tanto ad A, quanto a B nelle date Figure. Si costruirà in seguito la Figura richiesta come nel precedente Problema. Infatti le Figure simili stanno come i quadrati dei lati omologhi: ora il quadrato del lato X è eguale alla somma o alla differenza dei quadrati fatti sui lati omologhi A e B; dunque la Figura fatta sul lato X è eguale alla somma o alla differenza delle Figure simili fatte sui lati A e B.

Problema XV.° *Costruire una Figura simile ad una Figura data e che stia a questa Figura nel rapporto dato di* M *a* N.

Sia A un lato della Figura data, X il lato omologo della Figura cercata; bisognerà che il quadrato di X stia al quadrato di A come M sta ad N (425). Si troverà dunque X pel Problema XII, e conoscendo X si compirà il resto pel Problema XIII.

Problema XVI.° *Costruire una Figura simile alla Figura* P (Fig. 151), *ed equivalente alla Figura* Q.

Cercate il lato M del quadrato equivalente alla Figura P, ed il lato N del quadrato equivalente alla Figura Q. Sia quindi X una quarta proporzionale alle tre linee rette date M, N, AB; sul lato X, omologo ad AB, descrivete una Figura simile alla Fig. P; dico che essa sarà ancora equivalente alla Fig. Q.

Poichè, chiamando Y la Figura fatta sul lato X, si avrà $P : Y :: AB^2 : X^2$; ma, per costruzione, $AB : X :: M : N$ o $AB^2 : X^2 :: M^2 : N^2$; dunque $P : Y :: M^2 : N^2$. Oltracciò si ha pure, per costruzione, $M^2 = P$ e $N^2 = Q$; dunque $P : Y :: P : Q$; dunque $Y = Q$; dunque la Figura Y è simile alla Figura P, ed equivalente alla Figura Q.

Problema XVII.° *Costruire un rettangolo equivalente a un quadrato dato* C (Fig. 152), *e i di cui lati adiacenti facciano una somma data* AB.

Sopra AB, come diametro, descrivete una mezza-circonferenza; conducete parallelamente al diametro la retta DE ad una distanza AD eguale al lato del quadrato dato C. Dal punto E, ove la parallela taglia la circonferenza, abbassate sul diametro la perpendicolare EF; dico che AF ed FB saranno i lati del rettangolo cercato.

Poichè la loro somma è eguale ad AB, ed il loro rettangolo $AF \times FB$ è eguale al quadrato di EF (421) o al quadrato di AD: dunque questo rettangolo è equivalente al quadrato dato C.

Scolio. Bisogna, affinchè il Problema sia possibile, che la distanza AD non superi il raggio, vale a dire, che il lato del quadrato C non superi la metà della linea AB.

Problema XVIII.° *Costruire un rettangolo equivalente a un quadrato* C (Fig. 153), *ed i cui lati adiacenti abbiano fra di loro la differenza data* AB.

Sulla linea retta data AB, come diametro, descrivete una circonferenza;

all'estremità del diametro conducete la tangente AD eguale al lato del quadrato C; pel punto D e pel centro O tirate la secante DF; dico che DE e DF saranno i lati adiacenti del rettangolo richiesto.

Poichè 1.° la differenza di questi lati è eguale al diametro EF o AB; 2.° il rettangolo $DE \times DF$ è eguale ad AD^2 (428); dunque questo rettangolo sarà equivalente al quadrato dato C.

Problema XIX.° *Trovare la misura comune, se ve n'è alcuna, tra la diagonale ed il lato del quadrato.*

Sia ABCG (Fig. 154) un quadrato qualunque, AC la sua diagonale.

Bisogna primieramente portare BC sopra CA quante volte può esservi contenuta; e perciò sia descritto col centro C, e col raggio CB il mezzo-circolo DBE; si vede che CB è contenuta una volta in AC col resto AD; il resultato della prima operazione è dunque il quoziente 1 col resto AD, che bisogna paragonar con BC, o colla sua eguale AB.

Si può prendere $AF=AD$, e portare difatto AF sopra AB; si troverebbe che vi è contenuta due volte con un resto; ma siccome questo resto ed i seguenti vanno diminuendo, e ben presto ci sfuggirebbero per la lor piccolezza, questo non sarebbe che un mezzo meccanico imperfetto, donde non si potrebbe conchiuder niente per decidere se le linee rette AC, BC hanno fra loro, o non hanno una misura comune: ora v'è un mezzo semplicissimo di scansare le linee decrescenti, e di operare soltanto sopra linee, che restin sempre della medesima grandezza.

Infatti, essendo l'angolo ABC retto, AB è una tangente, ed AE una secante condotta dal medesimo punto: talmente che si ha (428) $AD : AB :: AB : AE$. Così nella seconda operazione, ove si tratta di paragonare AD con AB, si può, in vece del rapporto di AD ad AB, prender quello di AB ad AE: ora AB, o la sua eguale CD è contenuta due volte in AE col resto AD; dunque il resultato della seconda operazione è il quoziente 2 col resto AD, che bisogna paragonare ad AB.

La terza operazione, che consiste nel paragonare AD con AB, si ridurrà parimente a paragonare AB o la sua eguale CD con AE; e si avrà del pari 2 per quoziente, ed AD per resto.

Si fa manifesto da ciò che l'operazione non avrà mai fine, e che non v'è alcuna misura comune fra la diagonale ed il lato del quadrato; verità ch'era già cognita per mezzo dell'Aritmetica (giacchè queste due linee stanno fra loro come $\sqrt{2}:1$) (409), ma che acquista un maggior grado di chiarezza mediante la risoluzione Geometrica.

Scolio. Non è dunque possibile di trovare in numeri il rapporto esatto della diagonale al lato del quadrato; ma possiamo approssimarvisi tanto quanto si vorrà col mezzo della frazione *continua*, chè è eguale a questo rapporto. La prima operazione ha dato per quoziente 1; la seconda e tutte le altre all'infinito danno 2; onde la frazione, di cui si tratta, è $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{ec.}}}$ all'infinito.

Per esempio, se si calcola questa frazione fino al quarto termine inclusivamente, si trova che il suo valore è $1\frac{12}{29}$ o $\frac{41}{29}$; talmente che il rapporto approssimativo della diagonale al lato del quadrato è :: 41 : 29. Si troverebbe un rapporto più approssimativo calcolando un maggior numero dei termini.

LIBRO QUARTO.

I POLIGONI REGOLARI E LA MISURA DEL CIRCOLO.

434. Definizione. Un poligono, che è nel tempo stesso equiangolo ed equilatero, si chiama *poligono regolare.*

Vi son dei poligoni regolari di qualunque numero di lati. Il triangolo equilatero è il poligono regolare di tre lati, ed il quadrato quello di quattro.

PROPOSIZIONE I.

435. Teorema. *Due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati sono due Figure simili.*

I due poligoni avendo un egual numero n di lati, ne segue (372) che la somma degli angoli interni tanto per l'uno come per l'altro è $2(n-2)$. Inoltre siccome i due poligoni sono equiangoli, ne segue ancora che ciascun angolo di ognuno di essi è l'n^{sima} parte di $2(n-2)$ e che perciò hanno gli angoli eguali. Siano, per esempio, i due esagoni regolari (Fig. 155) ABCDEF, *abcdef.* La somma degli angoli in ambedue è otto angoli retti (*ivi*), e l'angolo A egualmente che l'angolo a è la sesta parte di questa somma, e quindi si ha $A=a$.

Riguardo alla proporzionalità dei lati, basta osservare che per la natura dei poligoni simili, i lati AB, BC, CD, ec. sono eguali, come pure ab, bc, cd, ec., e che in conseguenza si hanno le proporzioni AB : ab :: BC : bc :: CD : cd, ec.; dunque le due Figure, di cui si tratta, hanno gli angoli eguali, ed i lati omologhi proporzionali; esse dunque son simili (398 II.).

Corollario. I perimetri di due poligoni regolari d'un medesimo numero di lati stanno fra loro come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi medesimi lati (425).

Scolio. L'angolo d'un poligono regolare si determina per mezzo del numero dei suoi lati, come quello d'un poligono equiangolo (372).

PROPOSIZIONE II.

436. Teorema. *Ogni poligono regolare può essere iscritto nel circolo, e può esservi circoscritto.*

Sia ABCDE ec. (Fig. 156) il poligono, di cui si tratta; immaginate che si faccia passare una circonferenza pei tre punti A, B, C; sia O il di lei centro ed OP la perpendicolare abbassata sul mezzo del lato BC; tirate AO, ed OD.

Il quadrilatero OPCD, ed il quadrilatero OPBA posson essere soprapposti: infatti il lato OP è comune, l'angolo OPC=OPB, poichè sono retti; dunque il lato PC si applicherà sul suo eguale PB, ed il punto C cadrà in B. Di più, per la natura del poligono, l'angolo, PCD=PBA; dunque CD prenderà la direzione BA; e poichè CD=AB, il punto D cadrà in A e i due quadrilateri coincideranno interamente l'uno coll'altro. La distanza OD è dunque eguale ad AO e per conseguenza la circonferenza, che passa per i tre punti A, B, C, passerà anche pel punto D; ma, con un ragionamento simile, si proverà che la circonferenza, che passa per i tre vertici B, C, D, passerà ancora pel vertice dell'angolo susseguente E, e così di seguito: dunque la medesima circonferenza, che passa per i punti A, B, C, passerà per tutti i vertici degli angoli del poligono, ed il poligono resterà iscritto in questa circonferenza.

In secondo luogo, per rapporto a questa circonferenza, tutti i lati AB, BC, CD ec. son delle corde eguali: esse son dunque egualmente distanti dal centro (385); dunque se dal punto O, come centro e col raggio OP si descriva una circonferenza, questa circonferenza toccherà il lato BC, e tutti gli altri lati del poligono, ciascuno nel loro punto di mezzo, e la circonferenza sarà iscritta nel poligono, o il poligono circoscritto alla circonferenza medesima.

Scolio. I. Il punto O, centro comune del circolo iscritto e del circolo circoscritto, può essere riguardato pure come il centro del poligono; e per questa ragione si chiama *angolo al centro* l'angolo AOB formato dai due raggi condotti alle estremità d'un medesimo lato AB.

Poichè tutte le corde AB, BC, ec. sono eguali, è chiaro che tutti gli angoli al centro son eguali, e che perciò il valor di ciascuno si trova dividendo quattro angoli retti pel numero dei lati del poligono.

Scolio. II. Per iscrivere un poligono regolare d'un certo numero di lati in una circonferenza data si tratta soltanto di dividere la circonferenza in tante parti eguali, quanti lati dee avere il poliguno; poichè, essendo eguali gli archi, le corde AB, BC, CD, ec. (Fig. 158) saranno eguali; i triangoli AOB, BOC, COD ec. saranno pure eguali, perchè sono equilateri fra di loro: dunque tutti gli angoli ABC, BCD, CDE ec. saranno eguali: dunque la Figura ABCDE ec. sarà un poligono regolare.

PROPOSIZIONE III.

437. Problema. *Iscrivere un quadrato in una circonferenza data.*

Tirate (Fig. 157) due diametri AC, BD, che si taglino ad angoli retti; unite le estremità A, B, C, D e la Figura ABCD sarà il quadrato iscritto: poichè, essendo eguali gli angoli AOB, BOC, ec., le corde AB, BC ec. sono eguali.

Scolio. Essendo il triangolo BOC rettangolo ed isoscele, si ha (409) BC : BO :: $\sqrt{2}$: 1; dunque *il lato del quadrato iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 2 sta all'unità.*

PROPOSIZIONE IV.

438. **Problema.** *Iscrivere un esagono regolare, ad un triangolo equilatero in una data circonferenza.*

Supponiamo risoluto il Problema, e sia AB (Fig. 158) un lato dell'esagono iscritto; se si conducono i raggi AO, OB, dico che il triangolo AOB sarà equilatero.

Poichè l'angolo AOB è la sesta parte di quattro angoli retti: così prendendo l'angolo retto per unità, si avrà $AOB = {}^4/_6 = {}^2/_3$; i due altri angoli ABO, BAO del medesimo triangolo valgono insieme $2 - {}^2/_3$, ovvero ${}^4/_3$, e siccome sono eguali, ciascuno di essi $= {}^2/_3$; dunque il triangono ABO è equilatero; dunque il lato dell'esagono iscritto è eguale al raggio. Quindi resulta che, per iscrivere un esagono regolare in una circonferenza data, farà di mestieri portare il raggio sei volte sulla circonferenza, con che si ritornerà sul punto stesso, donde ci saremo partiti.

Essendo iscritto l'esagono ABCDEF, se si uniscono i vertici degli angoli alternativamente con linee rette, si formerà il triangolo equilatero ACE.

Scolio. La Figura ABCO è un parallelogrammo, ed anche una *losanga*, poichè $AB = BC = CO = AO$; dunque (412) la somma dei quadrati delle diagonali $AC^2 + BO^2$ è eguale alla somma dei quadrati de' lati, la quale è $4AB^2$ o $4BO^2$; togliendo da ambe le parti BO^2, resterà $AC^2 = 3BO^2$; dunque $AC^2 : BO^2 :: 3 : 1$, ovvero $AC : BO :: \sqrt{3} : 1$; dunque *il lato del triangolo equilatero iscritto sta al raggio come la radice quadrata di* 3 *sta all'unità.*

PROPOSIZIONE V.

439. **Problema.** *Iscrivere in un circolo dato un decagono regolare, quindi un pentagono, ed un pentadecagono.*

Dividete il raggio AO (Fig. 159) in media ed estrema ragione nel punto M (433 IV.); prendete la corda AB eguale al segmento maggiore OM; ed AB sarà il lato del decagono regolare, che bisognerà trasportar dieci volte sulla circonferenza.

Poichè, tirando MB, si ha, per costruzione, $AO : OM :: OM : AM$, ovvero, a motivo di $AB = OM$, $AO : AB :: AB : AM$; dunque i triangoli ABO, AMB hanno un angolo comune A compreso fra lati proporzionali; dunque son simili (418). Il triangolo OAB è isoscele; dunque il triangolo AMB lo è pure, e si ha $AB = BM$; d'altronde $AB = OM$; dunque anche $MB = OM$; dunque il triangolo BMO è isoscele.

L'angolo AMB esterno, per rapporto al triangolo isoscele BMO, è doppio dell'interno O (371); ora l'angolo $AMB = MAB$; dunque il triangolo OAB è tale che ciascuno degli angoli alla base OAB, ossia OBA è doppio dell'angolo al vertice O; dunque i tre angoli insieme del triangolo equivalgono a cinque volte l'angolo O e perciò l'angolo O è la quinta parte di due angoli retti, o la

decima di quattro; dunque l'arco AB è la decima parte della circonferenza e la corda AB è il lato del decagono regolare.

Corollario I. Se si uniscano di due in due i vertici degli angoli del decagono regolare, si formerà il pentagono regolare ACEGI.

II. Essendo sempre AB il lato del decagono, sia AL il lato dell'esagono; allora l'arco BL sarà per rapporto alla circonferenza $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, ovvero $\frac{1}{15}$; dunque la corda BL sarà il lato del pentadecagono o poligono regolare di 15 lati. Si vede nel tempo stesso che l'arco CL è la terza parte di CB.

Scolio. Essendo iscritto un poligono regolare, se si dividano gli archi sottesi dai suoi lati in due parti eguali e si tirino le corde dei mezzi-archi, queste formeranno un nuovo poligono regolare d'un doppio numero di lati: così si vede che il quadrato può servire ad iscrivere successivamente i poligoni regolari di 8, 16, 32 ec. lati. Del pari l'esagono servirà ad iscrivere i poligoni regolari di 12, 24, 48 ec. lati; il decagono i poligoni di 20, 40, 80 ec. lati; il pentadecagono i poligoni di 30, 60, 120 ec. lati (*a*).

PROPOSIZIONE VI.

440. Problema. *Essendo dato il poligono regolare iscritto* ABCD ec. (Fig. 160), *circoscrivere alla stessa circonferenza un poligono simile.*

Al punto di mezzo T dell'arco AB conducete la tangente GH, che sarà parallela ad AB (387); fate la stessa cosa in mezzo a ciascuno degli altri archi BC, CD, ec.; queste tangenti formeranno colle loro intersezioni il poligono regolare circoscritto GHIK ec. simile al poligono iscritto.

È facile di vedere primieramente che i tre punti O, B, H sono in linea retta, perchè i triangoli rettangoli OTH, OHN hanno l'ipotenusa comune OH ed il lato OT=ON; dunque sono eguali; dunque l'angolo TOH=HON; e per conseguenza la linea OH passa pel punto B mezzo dell'arco TN: per la medesima ragione il punto I è sul prolungamento di OC, ec. Ma poichè GH è parallela ad AB, e HI a BC, l'angolo GHI=ABC; parimente HIK=BCD, ec.; dunque gli angoli del poligono circoscritto sono eguali a quelli del poligono iscritto. Di più, a cagione di quelle medesime parallele, si ha GH : AB :: OH : OB, e HI : BC :: OH : OB; dunque GH : AB :: HI : BC. Ma AB=BC; dunque GH=HI. Per la stessa ragione HI=IK, ec.; dunque i lati del poligono circoscritto sono eguali fra loro; dunque questo poligono è regolare e simile al poligono iscritto.

Corollario I. Reciprocamente, se fosse dato il poligono circoscritto GHIK ec.,

(*a*) Si è per molto tempo creduto che questi poligoni fossero i soli, che potessero essere iscritti per mezzo della Geometria elementare, o pure, ciò che è lo stesso, per mezzo della risoluzione delle Equazioni di primo e di secondo grado: ma il Sig. Gauss ha dimostrato, in un'Opera intitolata *Disquisitiones Arithmeticae, Lipsiae,* 1801, che si può iscrivere con simili mezzi il poligono regolare di diciassette lati, ed in generale quello di 2^n+1 lati, purchè 2^n+1 sia un numero *primo*.

e che bisognasse costruir col suo mezzo il poligono iscritto ABC ec., si fa manifesto che basterebbe condurre ai vertici G, H, I ec. del poligono dato le linee OG, OH ec., che incontrerebbero la circonferenza nei punti A, B, C ec.; si unirebbero in seguito questi punti colle corde AB, BC ec., che formerebbero il poligono iscritto. Si potrebbero pure, nel medesimo caso, unire più semplicemente i punti di contatto T, N, P ec. colle corde TN, NP ec.; il che formerebbe egualmente un poligono iscritto simile al circoscritto.

II. Dunque si possono circoscrivere ad un circolo dato tutti i poligoni regolari, che si sanno iscrivere in questo circolo, e viceversa.

PROPOSIZIONE VII.

441. Teorema. *L'area d'un poligono regolare è eguale al suo perimetro moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.*

*Abbiasi (Fig. 160) il poligono GHIK ec. e sia n il numero dei suoi lati. Condotte le rette OG, OH ec., e abbassate le perpendicolari OT, ON ec., il poligono verrà decomposto in n triangoli tutti eguali al triangolo GOH, e quindi la sua superficie sarà eguale ad n volte quella di questo stesso triangolo, cioè ad $n \times GH \times {}^1/_2 OT$. Ma $n \times GH$, esprime evidentemente il perimetro GHIK ec.: dunque la superficie di un poligono regolare eguaglia il perimetro dello stesso poligono moltiplicato per la metà del raggio del circolo iscritto.

Scolio. Il raggio OT del circolo iscritto si suol chiamare l'*apotema* del poligono.

PROPOSIZIONE VIII.

442. Teorema. *I perimetri de' poligoni regolari d'un medesimo numero di lati stanno come i raggi dei circoli circoscritti, ed anche come i raggi dei circoli iscritti; le loro superficie poi stanno come i quadrati di questi medesimi raggi.*

*Sia AB (Fig. 161) un lato d'uno de' poligoni, di cui si tratta, O il suo centro, e per conseguenza OA il raggio del circolo circoscritto, ed OD perpendicolare sopra AB il raggio del circolo iscritto; sia parimente *ab* il lato d'un altro poligono simile, *o* il suo centro, *oa* ed *od* i raggi dei circoli circoscritto ed iscritto. I due triangoli ABO, *abo* sono simili perchè gli angoli AOB, *aob* sono eguali, e gli angoli BAO, *bao* sono pure eguali essendo ciascuno di essi la metà dell'angolo del poligono. Inoltre son simili anche i triangoli rettangoli ADO, *ado*. Dunque si ha 1.ª $AB : ab :: AO : ao :: OD : od$; come pure (136) 2.ª $AB^2 : ab^2 :: AO^2 : ao^2 :: OD^2 : od^2$. Ma noi sappiamo (425) che in generale i perimetri dei poligoni simili stanno tra loro come i lati omologhi e le superficie come i quadrati dei medesimi lati. Se dunque indichiamo con P, p i perimetri, e con S, s le superficie dei nostri poligoni, avremo 3.ª $P : p :: AB : ab$; 4.ª $S : s :: AB^2 : ab^2$. Confrontando ora la 1.ª e 3.ª come pure la 2.ª e 4.ª ne risulteranno le proporzioni $P : p :: AO : ao :: OD : od$, $S : s :: AO^2 : ao^2 :: OD^2 : od^2$ le quali provano la verità della proposizione enunciata.

PROPOSIZIONE IX.

443. **Lemma.** *Ogni linea curva o poligona, che circonda da un'estremità all'altra la linea convessa* AMB (Fig. 162) *è maggiore della linea circondata* AMB.

Abbiamo già detto che per linea convessa intendiamo una linea curva o poligona, o in parte curva ed in parte poligona, ma tale che una linea retta non possa tagliarla in più di due punti. Se la linea AMB avesse delle parti rientranti, o delle sinuosità, cesserebbe d'esser convessa, perchè è facil vedere che una linea retta potrebbe tagliarla in più di due punti. Gli archi di circolo sono essenzialmente convessi; ma la Proposizione, di cui trattasi adesso, s'estende ad una linea qualunque, che soddisfaccia alla condizione richiesta.

Posto ciò, se la linea AMB non è minore di tutte quelle, che la circondano, esisterà fra quest'ultime una linea più corta di tutte le altre, la quale sarà minore di AMB, o tutto al più eguale ad AMB. Sia ACDEB questa linea circondante; fra le due linee conducete, ove più vorrete, la retta PQ, che non incontri la linea AMB, o che al più non faccia che toccarla; la retta PQ è minore di PCDEQ; dunque, se alla parte PCDEQ si sostituisce la linea retta PQ, si avrà la linea circondante APQB minore di APDQB. Ma, per supposizione, questa doveva esser la più corta di tutte; dunque questa supposizione non può sussistere; dunque tutte le linee circondanti sono più lunghe di AMB.

Scolio. Si dimostrerà assolutamente (Fig. 163) nella stessa maniera, che una linea convessa e rientrante in sè stessa AMB è più corta d'ogni linea, che la circondasse da ogni parte; e ciò tanto se la linea circondante FHG tocca AMB in uno o più punti, quanto se la circonda senza toccarla.

PROPOSIZIONE X.

444. **Lemma.** *Essendo date due circonferenze concentriche, si può sempre iscrivere nella maggiore un poligono regolare, i di cui lati non incontrino la minore, e si può pur circoscrivere alla minore un poligono regolare, i di cui lati non incontrino la maggiore; di tal maniera che, in ambedue i casi, i lati del poligono descritto saranno racchiusi fra le due circonferenze.*

Siano CA, CB (Fig. 164) i raggi delle due circonferenze date. Pel punto A conducete la tangente DE terminata alla circonferenza maggiore in D ed E: iscrivete nella circonferenza maggiore uno dei poligoni regolari, che si possono iscrivere per i Problemi precedenti; dividete quindi gli archi sottesi dai lati in due parti eguali, e conducete le corde dei mezzi-archi: avrete un poligono regolare d'un doppio numero di lati. Continuate la bisezione degli archi finchè perveghiate ad un arco minore di DBE. Sia MBN quest'arco (il cui punto di mezzo è supposto in B); è chiaro che la corda MN sarà più lontana dal centro di DE, e che perciò il poligono regolare, di cui MN è un lato, non può incontrare la circonferenza, di cui CA è il raggio.

Poste le medesime cose, tirate CM e CN, che incontrino la tangente DE in P e Q; PQ sarà il lato d'un poligono circoscritto alla circonferenza minore, simile al poligono iscritto nella maggiore, il cui lato è MN. Ora è manifesto che il poligono circoscritto, che ha per lato PQ, non può incontrare la circonferenza maggiore, poichè CP è minore di CM.

Dunque, mediante la medesima costruzione, si può descrivere un poligono regolare iscritto nella circonferenza maggiore, ed un poligono simile circoscritto alla minore, i quali avranno i loro lati compresi fra le due circonfenze.

Scolio. Se si hanno due settori concentrici FCG, ICH, si potrà similmente iscrivere nel maggiore una *porzione di poligono regolare*, o circoscrivere al minore una porzione di poligono simile, talmente che i contorni dei due poligoni siano compresi fra le due circonferenze: basterà dividere l'arco FBG successivamente in 2, 4, 8, 16, ec. parti eguali, finchè si arrivi a una parte minore di DBE.

Chiamiamo qui *porzione di poligono regolare* la Figura terminata da una serie di corde eguali iscritte nell'arco FG da un'estremità all'altra. Questa porzione ha le proprietà principali dei poligoni regolari; essa ha gli angoli eguali e i lati eguali, ed è ad un tempo stesso iscrivibile e circoscrivibile al circolo. Frattanto ella non farebbe parte di un poligono regolare propriamente detto, se l'arco sotteso da uno dei suoi lati non fosse una parte aliquota della circonferenza.

PROPOSIZIONE XI.

445. Teorema. *Le circonferenze de' circoli sono tra loro come i raggi, e le loro superficie come i quadrati dei medesimi raggi.*

Per abbreviare, indichiamo con c.ª CA (Fig. 165) la circonferenza, che ha per raggio CA; dico che si avrà c.ª CA : c.ª OB : : CA : OB.

Poichè, se questa proporzione non ha luogo, CA starà ad OB come c.ª CA sta ad un quarto termine maggiore o minore di c.ª OB; supponiamo che sia minore; e sia, s'è possibile, CA : OB : : c.ª CA : c.ª OD.

Iscrivete nella circonferenza, di cui OB è il raggio, un poligono regolare EFGKLE, i cui lati non incontrino la circonferenza, della quale OD è il raggio (444); iscrivete un poligono simile MNPSTM nella circonferenza, di cui CA è il raggio.

Posto ciò, poichè questi poligoni sono simili, i loro perimetri MNPSM, EFGKE stanno fra loro come i raggi CA, OB de'circoli circoscritti (442); e si avrà MNPSM : EFGKE : : CA : OB; ma, per supposizione, CA : OB : : c.ª CA : c.ª OD; dunque MNPSM : EFGKE : : c.ª CA : c.ª OD. Ora questa proporzione è impossibile, perchè il contorno MNPSM è minore di c.ª CA (443), ed al contrario EFGKE è maggiore di c.ª OD; dunque è impossibile che CA stia ad OB come c.ª CA sta ad una circonferenza minore di c.ª OB; ovvero, in termini più generali, è impossibile che un raggio stia ad una raggio come la circonferenza descritta col primo raggio sta ad una circonferenza minore di quella descritta col secondo raggio.

Da ciò conchiudo, che non si può dare neppure che CA stia ad OB come c.ªCA sta ad una circonferenza maggiore di c.ªOB; poichè, se ciò fosse, rovesciando i rapporti, si avrebbe OB a CA come una ciconferenza maggiore di c.ªOB sta a c.ªCA, o, il che è lo stesso, come c.ªOB sta ad una circonferenza minore di c.ª CA; dunque un raggio starebbe ad un raggio come la circonferenza descritta col primo raggio sta ad una circonferenza minore della circonferenza descritta col secondo raggio; il che è stato dimostrato impossibile.

Poichè il quarto termine della proporzione CA : OB : : c.ª CA : X non può essere nè maggiore, nè minore di c.ªOB, bisogna che sia eguale a c.ªOB dunque le circonferenze de' circoli stanno fra loro come i raggi.

Un ragionamento ed una costruzione interamente simili serviranno a dimostrare che le superficie dei circoli stanno come i quadrati de' loro raggi.

Non entreremo in altri particolari su questa Proposizione, che d'altronde è un Corollario della seguente.

Corollario. Gli archi simili AB, DE (Fig. 166) stanno come i raggi AC, DO, ed i settori simili ACB, DOE stanno come i quadrati di questi medesimi raggi.

Poichè, siccome gli archi son simili, l'angolo C è eguale all'angolo O (398. III); ora l'angolo C sta a quattro angoli retti come l'arco AB sta alla circonferenza intera descritta col raggio AC (394); e l'angolo O sta a quattro angoli retti come l'arco DE sta alla circonferenza descritta col raggio OD; dunque gli archi AB, DE stanno fra loro come le circonferenze, di cui fanno parte; queste circonferenze stanno come i raggi AC, DO; dunque

$$arc.\,AB : arc.\,DE :: AC : DO.$$

Per la medesima ragione, i settori ACB, DOE stanno come i circoli interi; questi stanno come i quadrati de' raggi; dunque $set.\,ACB : set.\,DOE :: AC^2 : DO^2$.

PROPOSIZIONE XII.

446. Teorema. *La superficie del circolo è eguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio.*

Indichiamo con c.°CA (Fig. 167) la superficie del circolo, il di cui raggio è CA; dico che avremo c.°CA$=\frac{1}{2}$CA$\times$c.ªCA.

Poichè se $\frac{1}{2}$CA$\times$c.ªCA non è la superficie del circolo, il cui raggio è CA, questa quantità sarà la misura d'un circolo maggiore, o minore. Supponiamo primieramente che essa sia la misura d'un circolo maggiore, e sia, se è possibile, $\frac{1}{2}$CA$\times$c.ªCA$=$c.°CB.

Al circolo, il cui raggio è CA, circoscrivete un poligono regolare DEFG ec., i di cui lati non incontrino la circonferenza, che ha CB per raggio (444); la superficie di questo poligono sarà eguale al suo contorno DE$+$EF$+$FG$+$ ec. moltiplicato per $\frac{1}{2}$AC (441): ma il contorno del poligono è maggiore della circonferenza iscritta, poichè la circonda da tutte le parti, dunque la superficie del poligono DEFG ec. è maggiore di $\frac{1}{2}$AC$\times$c.ªAC, che per ipotesi è la

misura della superficie del circolo, di cui CB è il raggio; dunque il poligono sarebbe maggiore del circolo. Ora al contrario è minore, poichè vi è contenuto; dunque è impossibile che $^1/_2$CA$\times$c.^{a}CA sia maggiore di c.^{o}CA, ovvero, in altri termini, è impossibile che la circonferenza d'un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura d'un circolo maggiore.

Dico in secondo luogo che il medesimo prodotto non può essere la misura d'un circolo minore; e, per non cambiar Figura, supporrò che si tratti del circolo, il cui raggio è CB: bisogna dunque provare che $^1/_2$CB$\times$c.^{a} CB non può essere la misura d'un circolo minore, per esempio, del circolo il cui raggio è CA. Infatti sia, se è possibile, $^1/_2$CB$\times$c.^{a} CB=c.^{o}CA.

Avendo fatto la stessa costruzione di sopra, la superficie del poligono DEFG ec. avrà per misura (DE+EF+FG+ec.)$\times^1/_2$CA; ma il contorno DE +EF+FG+ec. è minore di c.^{a} CB, che lo circonda da tutte le parti; dunque la superficie del poligono è minore di $^1/_2$CA$\times$c.^{a}CB, ed a più forte ragione, minore di $^1/_2$CB$\times$ c.^{a} CB. Quest'ultima quantità è per ipotesi, la misura del circolo di cui CA è il raggio; dunque il poligono sarebbe minore del circolo iscritto; lo che è assurdo: dunque è impossibile che la circonferenza d'un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio sia la misura d'un circolo minore.

Dunque finalmente la circonferenza d'un circolo moltiplicata per la metà del suo raggio è la misura della superficie di questo medesimo circolo.

**Scolio.* Questa proposizione può riguardarsi come un corollario della VII.^{a} Infatti se si riflette che il circolo differisce tanto di meno dal poligono regolare che gli è iscritto o circoscritto, quanto più è grande il numero dei lati del poligono medesimo, vale a dire, che un poligono regolare iscritto o circoscritto al circolo tende ad identificarsi col circolo stesso, a misura che i suoi lati crescon di numero e scemano di grandezza, potremo legittimamente dedurne che il circolo non è altro se non che un poligono regolare di un numero infinito di lati, ossia un poligono regolare nel quale i raggi del circolo ad esso iscritto e di quello circosritto si confondono gli uni con gli altri, e che in conseguenza la sua superficie è misurata, come quella di ogni altro poligono regolare (441), dal suo perimetro, cioè dalla sua circonferenza moltiplicata per la metà del suo raggio. Così si evita l'obbiezione a cui lascia libero il campo la dimostrazione precedente, cioè che il prodotto c.^{a}CA$\times^1/_2$CA esprima tutt'altro che la superficie di un circolo.

Corollario I. La superficie d'un settore è eguale all'arco di questo settore moltiplicato per la metà del suo raggio.

Poichè il settore ACB (Fig. 168) sta al circolo intero come l'arco AMB sta alla circonferenza intera ABD (394), o come AMB$\times^1/_2$AC sta ad ABD$\times^1/_2$ AC. Ma il circolo intero =ABD$\times^1/_2$AC; dunque il settore ACB ha per misura AMB$\times^1/_2$AC.

II. Chiamiamo π la circonferenza, il di cui diametro è l'unità: poichè le circonferenze stanno come i raggi, o come i diametri, si potrà far questa proporzione: il diametro 1 sta alla sua circonferenza π come il diametro 2CA

(Fig. 165) sta alla circonferenza, che ha per raggio CA; talmente che si avrà $1 : \pi :: 2CA : c.^a CA$; dunque $c.^a CA = 2\pi \times CA$. Moltiplicando da ambe le parti per $\frac{1}{2}CA$, si avrà $\frac{1}{2}CA \times c.^a CA = \pi \times CA^2$, o $c.^o CA = \pi CA^2$; dunque *la superficie d' un circolo è eguale al prodotto del quadrato del suo raggio pel numero costante π, che rappresenta la circonferenza, il di cui diametro è 1, ossia il rapporto della circonferenza al diametro.*

Parimente la superficie del circolo, che ha per raggio OB, sarà eguale a $\pi \times OB^2$; ora $\pi \times CA^2 : \pi \times OB^2 :: CA^2 : OB^2$; dunque *le superficie dei circoli stanno fra loro come i quadrati dei loro raggi*, il che s'accorda col precedente Teorema.

Abbiamo già detto che il Problema della quadratura del circolo consiste nel trovare un quadrato eguale in superficie ad un circolo, il cui raggio sia cognito; ora si è provato che il circolo è equivalente al rettangolo fatto sulla circonferenza e la metà del raggio, e questo rettangolo si cangia in un quadrato prendendo una media proporzionale fra le due sue dimensioni (433. VI); quindi è che il Problema della quadratura del circolo si riduce a trovar la circonferenza quando si conosce il raggio, e per questo basta conoscere il rapporto della circonferenza al raggio, o al diametro.

Finora non si è potuto determinare questo rapporto se non che in una maniera prossima al vero; ma l'approssimazione è stata portata si lunge che la cognizione del rapporto esatto non avrebbe alcun vantaggio reale al di sopra di quella del rapporto approssimativo. Perciò questa ricerca, che ha molto occupato i Geometri allorchè i metodi di approssimazione erano men conosciuti, è adesso riposta tra le ricerche oziose, di cui non è permesso occuparsi se non a coloro, che hanno appena le prime nozioni della Geometria.

Archimede ha provato che il rapporto della circonferenza al diametro è compreso fra $3\frac{10}{70}$ e $3\frac{10}{71}$; laonde $3\frac{1}{7}$, ovvero $\frac{22}{7}$ è un valore già molto prossimo al numero, che abbiamo rappresentato con π; e questa prima approssimazione è molto in uso a cagione della sua semplicità. *Mezio* ha trovato pel medesimo numero il valore molto più approssimato $\frac{355}{113}$. Finalmente il valore di π, sviluppato fino a un cert'ordine di decimali, è stato trovato da altri Calcolatori 3,1415926535897932 ec., e si è avuta la pazienza di continuare queste decimali fino alla centoventisettesima e parimente sino alla centoquarantesima. È chiaro che una tale approssimazione quasi equivale alla verità e che non si conoscono meglio le radici delle Potenze imperfette.

Si spiegherà nei Problemi seguenti uno dei metodi elementari i più semplici per ottenere queste approssimazioni.

PROPOSIZIONE XIII.

447. PROBLEMA. *Essendo date le superficie d' un poligono regolare iscritto e d' un poligono simile circoscritto ad un circolo, trovare le superficie dei poligoni regolari iscritto e circoscritto d' un doppio numero di lati.*

Sia AB (Fig. 169) il lato del puligono datu iscritto, EF parallelo ad AB quello del poligono simile circoscritto, C il centro del circolo: se si tirano la corda AM e le tangenti AP, BQ, la corda AM sarà il lato del poligono iscritto d'un doppio numero di lati e PQ, doppio di PM, sarà quello del poligono simile circoscritto (440). Posto ciò, siccome la medesima costruzione avrà luogo nei differenti angoli eguali ad ACM, basta considerare l'angolo ACM solo, ed i triangoli, che vi son contenuti, staranno fra loro come i poligoni interi. Sia A la superficie del poligono iscritto, di cui AB è un lato, B la superficie del poligono simile circoscritto, A' la superficie del poligono iscritto di cui AM è un lato, B' la superficie del poligono simile circoscritto; A e B son cognite, si tratta di trovare A' e B'.

1.° I triangoli ACD, ACM, il cui vertice comune è A, stanno fra loro come le respettive basi CD, CM; d'altronde questi triangoli stanno come i poligoni A ed A', di cui fanno parte; dunque A : A' : : CD : CM. I triangoli CAM, CME, il cui vertice comune è M, stanno fra loro come le basi respettive CA, CE; questi medesimi triangoli stanno come i poligoni A' e B, di cui fanno parte; dunque A' : B : : CA : CE. Ma, a motivo delle parallele AD, ME, si ha CD : CM : : CA : CE; dunque A : A' : : A' : B; dunque il poligono A', uno di quelli che si cercano, è medio proporzionale fra i due poligoni cogniti A e B, e si ha per conseguenza $A'=\sqrt{A\times B}$.

2.° A motivo dell'altezza comune CM, il triangolo CPM sta al triangolo CPE come PM sta a PE; ma la linea CP dividendo in due parti eguali l'angolo MCE, si ha (415) PM : PE : : CM : CE : : CD : CA : : CD : CM : : CDA : CMA : : A : A'; perciò CPM : CPE : : A : A'; ed in conseguenza CPM : CPM+CPE o CME : : A : A+A'. Ma CMPA o 2CPM e CME stanno fra loro come i poligoni B' e B di cui fanno parte; dunque B' : B : : 2A : A+A'. Si è già determinato A'; questa nuova proporzione determinerà B', e si avrà $B'=\frac{2A\times B}{A+A'}$: dunque, col mezzo delle superficie dei poligoni A e B, è facile trovar quelle de' poligoni A' e B', che hanno un doppio numero di lati.

PROPOSIZIONE XIV.

448. Problema. *Trovare il rapporto approssimativo della circonferenza al diametro.*

Sia il raggio del circolo $=1$; il lato del quadrato iscritto sarà $\sqrt{2}$ (437); quello del quadrato circoscritto è eguale al diametro 2; dunque la superficie del quadrato iscritto $=2$, e quella del quadrato circoscritto $=4$. Adesso, se si fa $A=2$ e $B=4$, si troverà pel Problema precedente l'ottagono iscritto $A'=\sqrt{8}=2{,}8284271$, e l'ottagono circoscritto $B'=\frac{16}{2+\sqrt{8}}=3{,}3137085$. Conoscendo così gli ottagoni iscritto e circoscritto, si truveranno col loro mezzo i poligoni d'un doppio numero di lati; bisognerà nuovamente supporre $A=2{,}8284271$, $B=3{,}3137085$, e si avrà $A'=\sqrt{A\times B}=3{,}0614674$, e

$B' = \frac{2A \times B}{A + A'} = 3,1825979$. In seguito questi poligoni di 16 lati serviranno a far conoscere quelli di 32, e si continuerà così finchè il calcolo non dia più differenza fra i poligoni iscritto e circoscritto, almeno nelle cifre decimali a cui ci siamo fermati, che in questo esempio son sette. Arrivati a tal punto si conchiuderà, che il circolo è eguale all'ultimo resultamento, perchè il circolo dee sempre esser compreso tra il poligono iscritto ed il poligono circoscritto; dunque, se questi non differiscono fra di loro fino ad un cert'ordine di decimali, il circolo pure non ne differirà fino al medesimo ordine.

Ecco il calcolo della superficie di questi poligoni prolungato finchè non differiscano più nel settimo ordine di decimali.

Numero dei lati	Superficie del Poligono iscritto	Superficie del Poligono circoscritto
4	2,0000000	4,0000000
8	2,8284271	3,3137085
16	3,0614674	3,1825979
32	3,1214451	3,1517249
64	3,1365485	3,1441184
128	3,1403311	3,1422236
256	3,1412772	3,1417504
512	3,1415138	3,1416321
1024	3,1415729	3,1416025
2048	3,1415877	3,1415951
4096	3,1415914	3,1415933
8192	3,1415923	3,1415928
16384	3,1415925	3,1415927
32768	3,1415926	3,1415926.

Da ciò conchiudo che la superficie del circolo $=3,1415926$. Si potrebbe aver del dubbio sull'ultima decimale a cagione degli errori prodotti dalle parti, che vengon neglette; ma il calcolo è stato fatto con una decimale di più, per esser certi del resultato, che abbiam trovato fino all'ultima decimale.

Poichè la superficie del circolo è eguale alla mezza-circonferenza moltiplicata pel raggio, essendo il raggio $=1$, la mezza-circonferenza è 3,1415926; ovvero, essendo il diametro $=1$, la circonferenza è 3,1415926; dunque il rapporto della circonferenza al diametro, designato di sopra con π, è quello di 3,1415926 : 1.

APPENDICE AL LIBRO QUARTO.

449. Definizioni. i. Si chiama *maximum* la quantità la più grande di tutte della medesima specie: *minimum* la più piccola.

Così il diametro del circolo è un *maximum* fra tutte le rette, che con-

giungon due punti della circonferenza, e la perpendicolare è un *minimum* fra tutte le rette condotte da un punto dato ad una linea data.

11. Si chiamano Figure *isoperimetre* quelle, che hanno i perimetri eguali.

(*) PROPOSIZIONE I.

450. Teorema. *Fra tutti i triangoli che hanno base e perimetro eguale, il triangolo* maximum *è quello, nel quale i due lati non determinati sono eguali.*

Sia (Fig. 172) AC=CB ed AM+MB=AC+CB; dico che il triangolo isoscele ACB è maggiore del triangolo AMB, che ha la medesima base e lo stesso perimetro.

Dal punto C, come centro, e col raggio CA=CB descrivete una circonferenza, che incontri CA proluugato in D; tirate DB; e l'angolo DBA, iscritto nel mezzo circolo, sarà un angolo retto. Prolungate la perpendicolare DB verso N; fate MN=MB, e tirate AN. Finalmente dai punti M e C abbassate MP, e CG perpendicolari sopra DN. Poichè CB=CD ed MN=MB, si ha AC+CB=AD ed AM+MB=AM+MN. Ma AC+CB=AM+MB; dunque AD=AM+MN; dunque AD>AN. Ora, se l'obliqua AD è maggiore dell'obliqua AN, essa deve essere più lontana dalla perpendicolare AB; dunque DB>BN; dunque BG, che è metà di BD, sarà più grande di BP, metà di BN. Ma i triangoli ABC, ABM, che hanno la medesima base AB, stanno fra loro come le respettive altezze BG, BP; dunque, poichè si ha BG>BP, il triangolo isoscele ABC è maggiore del non-isoscele ABM della medesima base e dello stesso perimetro.

(*) PROPOSIZIONE II.

451. Teorema. *Di tutti i poligoni isoperimetri, e d'un medesimo numero di lati quello, ch'è un* maximum, *ha i suoi lati eguali.*

Poichè sia (Fig. 173) ABCDEF il poligono *maximum;* se il lato BC non è eguale a CD, fate sulla base BD un triangolo isoscele BOD, che sia isoperimetro BCD; il triangolo BOD sarà maggiore di BCD (450), e per conseguenza il poligono ABODEF sarà maggiore di ABCDEF; dunque quest'ultimo non sarebbe il *maximum* fra tutti quelli, che hanno l'istesso perimetro ed il medesimo numero di lati; il che è contro la supposizione. Dunque si deve avere BC=CD; avremo per la medesima ragione CD=DE, DE=EF, ec. dunque tutti i lati del poligono *maximum* sono eguali tra loro.

(*) PROPOSIZIONE III.

452. Teorema. *Di tutti i triangoli formati con due lati dati, facenti fra loro un angolo a piacimento, il* maximum *è quello, in cui i due lati dati formano un angolo retto.*

Siano (Fig 174) i due triangoli BAC, BAD che hanno il lato AB comune,

ed il lato AC=AD; se l'angolo BAC è retto, dico che il triangolo BAC sarà maggior del triangolo BAD, nel quale l'angolo A è acuto od ottuso.

Poichè, avendo la stessa base AB, i due triangoli BAC, BAD stanno come le altezze AC, DE; ma la perpendicolare DE è minor dell'obliqua AD o della sua eguale AC; dunque il triangolo BAD è minore di BAC.

(*) PROPOSIZIONE IV.

453. Teorema. *Di tutti i poligoni formati con dei lati dati, ed un ultimo a piacimento, il* maximum *dev' esser tale che tutti i suoi angoli siano iscritti in una mezza-circonferenza, di cui il lato incognito sia il diametro.*

Sia (Fig. 175) ABCDEF il *maximum* dei poligoni formati coi lati dati AB, BC, CD, DE, EF, ed un ultimo AF a piacimento; tirate le diagonali AD, DF. Se l'angolo ADF non fosse retto, si potrebbe, conservando le parti ABCD, DEF tali quali sono, aumentare il triangolo ADF, e per conseguenza il poligono intero, rendendo l'angolo ADF retto, conformemente alla Proposizione precedente: ma questo poligono non può essere aumentato di più, poichè si suppone giunto al suo *maximum;* dunque l'angolo ADF è già un angolo retto. Lo stesso è degli angoli ABF, ACF, AEF; dunque tutti gli angoli A, B, C, D, E, F, del poligono *maximum* sono iscritti in una mezza circonferenza, di cui il lato indeterminato AF è il diametro.

Scolio. Questa Proposizione dà luogo ad una questione, cioè se vi siano più maniere di formare un poligono con dei lati dati, ed un ultimo incognito, che sarà il diametro della mezza-circonferenza, nella quale gli altri lati sono iscritti. Avanti di decidere questa questione bisogna, osservare che, se una medesima corda AB (Fig. 176) sottende degli archi descritti con differenti raggi AC, AD, l'angolo al centro appoggiato su questa corda sarà minore nel circolo, il di cui raggio è maggiore; così $ACB < ADB$. Infatti l'angolo $ADO = ACD + CAD$ (371); dunque $ACD < ADO$, e raddoppiando da una parte e dall'altra si avrà $ACB < ADB$.

(*) PROPOSIZIONE V.

454. Teorema. *Non vi è* (Fig. 175) *che una sola maniera di formare il poligono* ABCDEF *con dei lati dati, ed un ultimo incognito, che sia il diametro della mezza-circonferenza, nella quale sono iscritti gli altri lati.*

Poichè, supponiamo che si sia trovato un circolo, che soddisfaccia alla questione: se si prenda un circolo maggiore, le corde AB, BC, CD, ec. corrisponderanno ad angoli al centro minori. La somma di questi angoli al centro sarà dunque minore di due angoli retti; così le estremità dei lati dati non termineranno più alle estremità d'un diametro. L'inconveniente contrario avrà luogo se si prenda un circolo minore: dunque il poligono, di cui si tratta, non può essere iscritto se non che in un sol circolo.

Scolio. Si può cambiare a piacimento l'ordine dei lati AB, BC, CD, ec., ed

il diametro del circolo circoscritto sarà sempre lo stesso, come pure la superficie del poligono; poichè, qualunque sia l'ordine degli archi AB, BC, ec., basta che la lor somma faccia la mezza-circonferenza, ed il poligono avrà sempre la medesima superficie, poichè sarà eguale al mezzo-circolo meno i segmenti AB, BC, ec., la somma dei quali è sempre la stessa.

PROPOSIZIONE VI.

455. Teorema. *Di tutti i poligoni formati con dei lati dati il* maximum *è quello, che si può iscrivere in un circolo.*

Sia (Fig. 177) ABCDEFG il poligono iscritto, e *abcdefg* il non iscrittibile formato con dei lati eguali, talmente che si abbia AB=*ab*, BC=*bc*, ec.; dico che il poligono iscritto è maggiore dell'altro.

Tirate il diametro EM; conducete AM, MB; sopra *ab*=AB fate il triangolo *abm*=ABM e tirate *em*.

In virtù della Proposizione IV, il poligono EFGAM è maggiore di *efgam*, salvo che questo non possa essere parimente iscritto in una mezza-circonferenza di cui il lato *em* fosse il diametro; nel qual caso i due poligoni sarebbero eguali in virtù della Proposizione V. Per la medesima ragione il poligono EDCBM è maggiore di *edcbm*, salvo la medesima eccezione, in cui vi sarebbe eguaglianza. Dunque il poligono intero EFGAMBCDE è maggiore di *efgambcde* salvo che non siano interamente eguali; ma essi non lo sono, poichè l'uno è iscritto nel circolo, e l'altro è supposto non-iscrittibile; dunque il poligono iscritto è il maggiore. Togliendo da ambedue le parti i triangoli eguali ABM, *abm*, resterà il poligono iscritto ABCDEFG maggiore del non-iscrittibile *abcdefg*.

Scolio. Si dimostrerà come nella Proposizione V. che non può esservi che un sol circolo, e per conseguenza che un sol poligono *maximum*, che sodisfaccia alla questione; e questo poligono sarebbe ancora della medesima superficie in qualunque modo che si cangiasse l'ordine dei suoi lati.

(*) PROPOSIZIONE VII.

456. Teorema. *Il poligono regolare è un* maximum *fra tutti i poligoni isoperimetri e d'un medesimo numero di lati.*

Poichè, per il Teorema II, il poligono *maximum* ha tutti i suoi lati eguali; e, per il Teorema precedente, è iscrittibile nel circolo; dunque questo poligono è regolare.

(*) PROPOSIZIONE VIII.

457. Lemma. *Due angoli al centro, misurati in due circoli differenti, stanno fra loro come gli archi compresi divisi per i loro raggi.*

Così l'angolo C (Fig. 178) sta all'angolo O come $\frac{AB}{AC}$ sta a $\frac{DE}{DO}$.

Con un raggio OF eguale ad AC descrivete l'arco FG compreso fra i lati OD, OE prolungati. A cagione de' raggi eguali AC, OF, si avrà primieramente $C:O::AB:FG$ (394), ovvero $::\frac{AB}{AC}:\frac{FG}{FO}$. Ma a cagione degli archi simili FG, DE, si ha $FG:DE::FO:DO$, dunque il rapporto $\frac{FG}{FO}$ è eguale al rapporto $\frac{DE}{DO}$, e per conseguenza si ha $C:O::\frac{AB}{AC}:\frac{DE}{DO}$.

(*) PROPOSIZIONE IX.

458. Teorema. *Di due poligoni regolari isoperimetri quello, che ha più lati, è il maggiore.*

Sia DE (Fig. 179) il mezzo lato d'un dei poligoni, O il suo centro, OE il suo apotèma; sia AB il mezzo lato dell'altro poligono, C il suo centro, AB il suo apotèma. Si suppongono i centri O e C situati ad una distanza qualunque OC e gli apotèmi OE, CB nella direzione OC; così DOE e ACB saranno i mezzi-angoli al centro dei poligoni; e siccome questi angoli non sono eguali, le rette AC, OD prolungate s'incontreranno in un punto F; da questo punto abbassate sopra OC la perpendicolare FG; dai punti O e C come centri, descrivete gli archi GI, GH terminati ai lati OF, CF.

Posto ciò, si avrà pel Lemma precedente $O:C::\frac{GI}{OG}:\frac{GH}{CG}$; ma DE sta al perimetro del primo poligono come l'angolo O sta a quattro angoli retti; ed AB sta al perimetro del secondo come l'angolo C sta a quattro angoli retti; dunque, poichè i perimetri dei poligoni sono eguali, $DE:AB::O:C$, ovvero $DE\cdot AB::\frac{GI}{OG}:\frac{GH}{CG}$. Moltiplicando gli antecedenti per OG ed i conseguenti per CG, si avrà allora $DE\times OG:AB\times CG::GI:GH$; ma i triangoli simili ODE, OFG danno $OE:OG::DE:FG$, donde resulta $DE\times OG=OE\times FG$; si avrà parimente $AB\times CG=CB\times FG$; dunque $OE\times FG:CB\times FG::GI:GH$, ovvero $OE:CB::GI:GH$. Se dunque farem vedere che l'arco GI è maggiore dell'arco GH, ne seguirà che l'apotèma OE è maggiore di CB.

Dall'altra parte di CF si faccia la Figura CKx interamente eguale alla Figura CGx, in modo che si abbia $CK=CG$, l'angolo $HCK=HCG$, e l'arco $Kx=xG$; la curva KxG circonderà l'arco KHG, e sarà maggior di quest'arco; dunque Gx metà della curva è maggiore di GH metà dell'arco; dunque a più forte ragione, GI è maggior di GH.

Resulta da ciò che l'apotèma OE è maggiore di CB; ma i due poligoni, avendo il medesimo perimetro, stanno fra loro come i respettivi apotèmi (441); dunque il poligono, che ha per mezzo-lato DE, è maggiore di quello, che ha per mezzo-lato AB; il primo ha più lati, poichè il suo angolo al centro è minore; dunque di due poligoni regolari isoperimetri quello, che ha più lati, è il maggiore.

(*) PROPOSIZIONE X.

459. **Teorema.** *Il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro.*
Si è già provato che di tutti i poligoni isoperimetri e d'un medesimo numero di lati, il poligono regolare è il più grande; laonde non si tratta adesso che di paragonare il circolo ad un poligono regolare qualunque isoperimetro. Sia (Fig. 180) AI il mezzo lato di questo poligono, C il suo centro. Sia nel circolo isoperimetro l'angolo DOE=AC, e perciò l'arco DE eguale al mezzo-lato AI. Il poligono P sta al circolo C come il triangolo ACI sta al settore ODE; così avremo $P:C::\frac{AI\times CI}{2}:\frac{DE\times OE}{2}::CI:OE$. Sia condotta al punto E la tangente EG, che incontri OD prolungata in G; i triangoli simili ACI, GOE daranno la proporzione CI:OE::AI ovvero DE:GE; dunque P:C::DE:GE, o come $DE\times\frac{1}{2}OE$, che è la misura del settore DOE, sta a $GE\times\frac{1}{2}OE$, che è la misura del triangolo GOE: ora il settore è minor del triangolo; dunque P è minore di C; dunque il circolo è maggiore d'ogni poligono isoperimetro.

LIBRO QUINTO.

I PIANI E GLI ANGOLI SOLIDI.

460. Definizioni. i. Una linea retta è *perpendicolare ad un piano* allorchè essa è perpendicolare a tutte le rette, che passano pel suo *piede* nel piano (464). Reciprocamente il piano è perpendicolare alla linea. Il *piede* della perpendicolare è il punto dove questa linea incontra il piano.

ii. Una linea è *parallela ad un piano* quando non può incontrarlo, a qualunque distanza ambedue si prolunghino. Reciprocamente il piano è parallelo alla linea.

iii. Due *piani* son *paralleli* fra loro quando non possono mai incontrarsi, a qualunque distanza si prolunghino l'uno e l'altro.

iv. Si dimostrerà (463) che l'intersezione comune di due piani che s'incontrino, è una linea retta: posto ciò, l'*angolo* o l'*inclinazione* scambievole *di due piani* è la quantità più o meno grande, per cui sono distanti l'uno dall'altro; questa quantità si misura (477) dall'angolo che fanno fra loro le due perpendicolari condotte in ciascuno di questi piani da un medesimo punto dell'intersezione comune. Quest'angolo può essere acuto, retto, od ottuso.

v. Se è retto, i due *piani* son *perpendicolari* fra loro.

vi. *Angolo solido* è lo spazio angolare compreso tra più piani, che si riu-

niscono in un medesimo punto. Così l'angolo solido (Fig. 199) S è formato dalla riunione degli angoli piani ASB, BSC, CSD, DSA. Sono necessarj almeno tre angoli piani per formare un angolo solido.

PROPOSIZIONE I.

461. Teorema. *Una linea retta non può essere in parte sopra un piano, ed in parte fuori.*

Poichè, secondo la definizione del piano, subito che una linea retta ha due punti comuni con un piano, essa è tutta intera in qnesto piano.

Corollario. Per riconoscere se una superficie è piana, bisogna applicare una linea retta in differenti sensi su questa superficie, e vedere se essa tocca la superficie in tutta la sua estensione.

PROPOSIZIONE II.

462. Teorema. *Due linee rette, che si tagliano, sono in un medesimo piano, e ne determinano la posizione.*

Siano (Fig. 181) AB, AC due linee rette, che si tagliano in A : si può concepire un piano dove si trovi la linea retta AB: se in seguito si fa girar questo piano intorno ad AB finchè passi pel punto C, allora la linea AC, che ha due dei suoi punti A e C in questo piano, ci sarà tutta intera; dunque la posizione di questo piano è determinata dalla sola condizione di contenere le due rette AB, AC.

Corollario I. Un triangolo ABC, o tre punti A, B, C non in linea retta, determinano la posizione d'un piano.

II. Dunque anche due parallele AB, CD (Fig. 182) determinano la posizione d'un piano; perchè, se si conduce la secante EF, il piano delle due rette AE, EF sarà quello delle parallele AB, CD.

PROPOSIZIONE III.

463. Teorema. *Se due piani si tagliano, la loro comune intersezione sarà una linea retta.*

Poichè, se tra i punti comuni ai due piani se ne trovassero tre, che non fossero in linea retta, i due piani di cui si tratta, passando ciascuno per questi tre punti, non ne farebber che uno solo e medesimo piano (462); il che è contro la supposizione.

PROPOSIZIONE IV.

464. Teorema. *Se una linea retta* AP (Fig. 183) *è perpendicolare a due altre* PB, PC, *che s'incrociano al suo piede nel piano* MN, *essa sarà perpendicolare ad una retta qualunque* PQ *condotta pel suo piede nel medesimo piano, e perciò sarà perpendicolare al piano* MN.

Per un punto Q, preso a piacere sopra PQ, tirate la retta BC nell'angolo BPC di maniera che BQ=QC (423 V.); tirate AB, AQ, AC.

La base BC essendo divisa in due parti eguali nel punto Q, il triangolo BPC darà (412) $PC^2+PB^2=2PQ^2+2QC^2$. Il triangolo BAC darà parimente $AC^2+AB^2=2AQ^2+2QC^2$. Togliendo la prima equazione dalla seconda, e osservando che i triangoli APC, APB, ambedue rettangoli in P, danno $AC^2-PC^2=AP^2$ e $AB^2-PB^2=AP^2$, si avrà $AP^2+AP^2=2AQ^2-2PQ^2$.

Dunque, prendendo la metà da ambe le parti, $AP^2=AQ^2-PQ^2$ o $AQ^2=AP^2+PQ^2$; dunque il triangolo APQ è rettangolo in P (411); dunque AP è perpendicolare a PQ.

Scolio. Si vede da ciò che non solamente è possibile che una linea retta sia perpendicolare a tutte quelle che passano pel suo piede in un piano, ma che questo accade tutte le volte che questa linea è perpendicolare a due rette condotte nel piano; questo è ciò che dimostra la legittimità della Definizione I.

Corollario I. La perpendiculare AP è più corta di un'obliqua qualunque AQ; essa dunque misura la vera distanza dal punto A al piano PQ.

II. Da un punto P dato sopra un piano non si può alzare che una sola perpendicolare a questo piano; perchè, se si potessero alzare due perpendicolari dal medesimo punto P, conducete per queste due perpendicolari un piano la cui intersezione col piano NM sia PQ; allora le due perpendicolari di cui si tratta, sarebbero perpendicolari alla linea PQ nel medesimo punto e nel medesimo piano; il che è impossibile.

È parimente impossibile d'abbassare da un punto dato fuori d'un piano due perpendicolari a questo piano: poichè siano AP, AQ queste due perpendicolari; allora il triangolo APQ avrebbe due angoli retti APQ, AQP; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE V.

465. Teorema. *Le oblique ugualmente lontane dalla perpendicolare sono eguali; e di due oblique disugualmente lontane dalla perpendicolare quella, che se ne allontana di più, è la maggiore.*

Poichè (Fig. 184) essendo retti gli angoli APB, APC, APD, se si suppongono le distanze PB, PC, PD eguali fra loro, i triangoli APB, APC, APD avranno un angolo eguale compreso fra lati eguali; dunque saranno eguali; dunque le ipotenuse o le oblique AB, AC, AD saranno eguali fra loro. Parimente, se la distanza PE è maggior di PD o della sua eguale PB, è chiaro che l'obliqua AE sarà maggiore di AB o della sua eguale AD.

Corollario. Tutte le oblique eguali AB, AC, AD, ec. terminano alla circonferenza BCD descritta dal piede P della perpendicolare come centro; dunque, essendo dato un punto A fuori d'un piano, se si vuol trovare su questo piano il punto P ove cadrebbe la perpendicolare abbassata da A, bisogna segnare su questo piano tre punti B, C, D egualmente lontani dal punto A, e cercare in seguito il centro del circolo che passa per questi punti; questo centro sarà il punto cercato P.

Scolio. L'angolo ABP è ciò che si chiama *inclinazione dell'obliqua* AB *sul piano* MN; si vede che questa inclinazione è eguale per tutte le oblique AB, AC, AD, ec., che si allontanano egualmente dalla perpendicolare, perchè tutti gli angoli ABP, ACP, ADP, ec. sono eguali tra loro.

PROPOSIZIONE VI.

466. Teorema. *Sia* (Fig. 185) AP *una perpendicolare al piano* MN *e* BC *una linea situata in questo piano: se dal piede* P *della perpendicolare si abbassi* PD *perpendicolare sopra* BC, *e si tiri* AD, *dico che* AD *sarà perpendicolare a* BC.

Prendete DB=DC, e tirate PB, PC, AB, AC: poichè DB=DC, l'obliqua PB=PC; e per rapporto alla perpendicolare AP, poichè PB=PC, l'obliqua AB=AC (465); dunque la linea AD ha due dei suoi punti A e D egualmente distanti dalle estremità B e C; dunque AD è perpendicolare sul mezzo di BC.

Corollario. Si vede nel medesimo tempo che BC è perpendicolare al piano APD, poichè BC è perpendicolare ad un tempo alle due rette AD, PD.

Scolio. Le due linee AE, BC offron l'esempio di due linee rette, che non s'incontrano perchè non sono situate in un medesimo piano. La più corta distanza di queste linee è la retta PD, che è ad un tempo stesso perpendicolare alla linea AP e alla linea BC. La distanza PD è la più corta fra queste due linee, poichè, se si congiungono due altri punti, come A e B, avremo AB>AD, AD>PD: dnnque a più forte ragione AB>PD.

Le due linee AE, CB, benchè non situate in un medesimo piano, sono considerate come facienti tra loro un angolo retto, perchè AE e la parallela condotta per un dei suoi punti alla linea BC farebbero tra loro un angolo retto. Parimente la linea AB e la linea PD, che rappresentano due rette qualunque non situate nel medesimo piano, sono considerate come facienti tra loro il medesimo angolo, che farebbe con AB la parallela a PD condotta per uno dei punti di AB.

PROPOSIZIONE VII.

467. Teorema. *Se la linea* AP (Fig. 186) *è perpendicolare al piano* MN, *ogni linea* DE *parallela ad* AP *sarà perpendicolare al medesimo piano.*

Per le parallele AP, DE conducete un piano, la di cui intersezione col piano MN sarà PD; nel piano MN conducete BC perpendicolare a PD, e tirate AD.

Secondo il Corollario del Teorema precedente BC è perpendicolare al piano APDE, dunque l'angolo BDE è retto: ma l'angolo EDP è pure retto, poichè AP è perpendicolare a PD e DE è parallela ad AP; dunque la linea DE è perpendicolare alle due rette DP, DB; essa dunque è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario I. Reciprocamente, se le rette AP, DE son perpendicolari al me-

desimo piano MN, esse saranno parallele; poichè, se non lo fossero, conducete pel punto D una parallela ad AP, questa parallela sarà perpendicolare al piano MN; dunque si potrebbero da un medesimo punto D alzare due perpendicolari a un medesimo piano; il che è impossibile (464).

II. Due linee A e B parallele ad una terza C son parallele fra loro; poichè immaginate un piano perpendicolare alla linea C; le linee A e B parallele a questa perpendicolare saranno perpendicolari al medesimo piano; dunque, pel Corollario precedente, esse saranno parallele fra loro.

Si suppone che le tre linee non siano in un medesimo piano, senza di che la Proposizione sarebbe già conosciuta (368).

PROPOSIZIONE VIII.

468. Teorema. *Se la linea* AB (Fig. 187) *è parallela a una retta* CD *condotta nel piano* MN, *essa sarà parallela a questo piano.*

Poichè, se la linea AB, che è nel piano ABCD, incontrasse il piano MN, ciò non potrebbe essere che in qualche punto della linea CD, intersezione comune dei due piani: ora AB non può incontrare CD, poichè le è parallela; essa dunque non incontrerà neppure il piano MN; dunque sarà parallela a questo piano.

PROPOSIZIONE IX.

469. Teorema. *Due piani* MN, PQ (Fig. 188), *perpendicolari a una medesima retta* AB *son paralleli fra loro.*

Poichè, se s'incontrassero in qualche luogo, sia O uno dei loro punti comuni; tirate OA, OB; la linea AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta OA condotta dal suo piede in questo piano; per la medesima ragione AB è perpendicolare a BO; dunque OA e OB sarebbero due perpendicolari abbassate dal medesimo punto O sulla medesima linea retta; il che è impossibile: dunque i piani MN, PQ non possono incontrarsi; dunque son paralleli.

PROPOSIZIONE X.

470. Teorema. *Le intersezioni* EF, GH (Fig. 189) *di due piani paralleli* MN, PQ *con un terzo piano* FG *son parallele.*

Poichè, se le linee EF, GH situate in uno stesso piano non son parallele, essendo prolungate s'incontreranno; dunque i piani MN, PQ, ne' quali esse sono, s'incontrerebbero pure; dunque non sarebbero paralleli.

PROPOSIZIONE XI.

471. Teorema. *La linea* AB *perpendicolare al piano* MN *è ancor perpendicolare al piano* PQ *parallelo a* MN.

Avendo tirata a piacere la linea BC nel piano PQ, per AB e BC conducete un piano ABC, la cui intersezione col piano MN sia AD; l'intersezione AD sarà parallela a BC (470); ma la linea AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta AD; essa dunque sarà perpendicolare anche alla sua parallela BC; e poichè la linea AB è perpendicolare ad ogni retta BC condotta pel suo piede nel piano PQ, ne segue che essa è perpendicolare al piano PQ.

PROPOSIZIONE XII.

472. Teorema. *Le parallele* EG, FH (Fig. 189) *comprese fra due piani paralleli* MN, PQ *sono eguali.*

Per le parallele EG, FH fate passare il piano EGHF, che incontrerà i piani paralleli seguendo EF, e GH. Le intersezioni EF, GH son parallele tra loro (470), come pure, EG, FH; dunque la Figura EGHF è un parallelogrammo; dunque EG=FH.

Corollario. Segue da ciò, che *due piani paralleli sono da per tutto ad egual distanza:* poichè, se EG ed FH sono perpendicolari ai due piani MN, PQ, esse saranno parallele fra loro (467); dunque saranno eguali.

PROPOSIZIONE XIII.

473. Teorema. *Se due angoli* CAE, DBF (Fig. 190) *non situati nello stesso piano hanno i loro lati paralleli e diretti in un medesimo senso, questi angoli saranno eguali, e i loro piani saranno paralleli.*

Prendete AC=BD, AE=BF, e tirate CE, DF, AB, CD, EF. Poichè AC è eguale e parallela a BD, la Figura ABDC è un parallelogrammo: dunque CD è eguale e parallela ad AB. Per una simil ragione EF è eguale e parallela ad AB; dunque ancora CD è eguale e parallela ad EF: la Figura CEFD è dunque un parallelogrammo, e così il lato CE è eguale e parallelo a DF: dunque i triangoli CAE, DBF sono equilateri fra di loro; dunque l'angolo CAE=DBF.

In secondo luogo dico, che il piano ACE è parallelo al piano BDF: poichè supponiamo che il piano parallelo a BDF condotto pel punto A incontri le linee CD, EF, in punti diversi da C ed E, per esempio, in G ed H; allora, secondo la Proposizione XII, le tre linee AB, GD, FH saranno eguali: ma le tre AB, CD, EF lo son già; dunque si avrebbe CD=GD ed FH=EF; il che è assurdo; dunque il piano ACE è parallelo a BDF.

Corollario. Se due piani paralleli MN, PQ sono incontrati da due altri piani CABD, EABF, gli angoli CAE, DBF, formati dalle intersezioni dei piani paralleli, saranno eguali; perchè l'intersezione AC è parallela a BD (470), AE lo è a BF; dunque l'angolo CAE=DBF.

PROPOSIZIONE XIV.

474. *Se tre rette* AB, CD, EF (Fig. 190), *non situate nel medesimo piano, sono eguali e parallele, i triangoli* ACE, BDF *che si formano da una parte e dall' altra congiungendo l' estremità di queste rette, saranno eguali, e i loro piani saran paralleli.*

Poichè siccome AB è eguale e parallela a CD, la Figura ABDC e un parallelogrammo; dunque il lato AC è eguale e parallelo a BD. Per la stessa ragione i lati AE, BF sono eguali e paralleli, come pure CE, DF; dunque i due triangoli ACE, BDF sono eguali: si proverà ancora, come nella Proposizione precedente, che i loro piani son paralleli.

PROPOSIZIONE XV.

475. Teorema. *Due rette comprese fra tre piani paralleli son tagliate in parti proporzionali.*

Supponiamo (Fig. 191) che la linea AB incontri i piani paralleli MN, PQ, RS in A, E, B, e che la linea CD incontri i medesimi piani in C, F, D; dico che si avrà AE : EB : : CF : FD.

Tirate AD, che incontri il piano PQ in G, e conducete AC, EG, GF, BD: le intersezioni EG, BD dei piani paralleli PQ, RS col piano ABD son parallele; dunque AE : EB : : AG : GD; parimente, essendo parallele le intersezioni AC, GF, si ha AG : GD : : CF : FD; dunqne a cagione del rapporto comune AG : GD, si avrà AE : EB : : CF : FD.

(*) PROPOSIZIONE XVI.

476. Teorema. *Sia* ABCD (Fig. 192) *un quadrilatero qualunque situato o non situato in un medesimo piano; se si tagliano i lati opposti proporzionalmente con due rette* EF, GH *in modo che si abbia* AE : EB : : DF : FC, e BG : CG : : AH : HD, *dico che le rette* EF, GH *si taglieranno in un punto* M *di maniera che si avrà* HM : MG : : AE : EB, ed EM : MF : : AH : HD.

Conducete per AD un piano qualunque A*b*H*c*D, che non passi per GH; pei punti E, B, C, F conducete a GH le parallela E*e*, B*b*, C*c*, F*f*, che incontrino questo piano in *e*, *b*, *c*, *f*. A motivo delle parallela B*b*, GH, C*c*, avremo *b*H : H*c* : : BG : : GC : : AH : HD; dunque i triangoli AH*b*, DH*c*, sono simili. Si avrà di più A*e* : *eb* : : AE : EB, e D*f* : *fc* : : DF : FC; dunque A*e* : *eb* : : D*f* : *fc*, ovvero *componendo*, A*e* : D*f* : : A*b* : D*c*. Ma, a motivo dei triangoli simili AH*b*, DH*c*, si ha A*b* : D*c* : : AH : HD; dnnqne A*e* : D*f* : : AH : HD; d' altronde i triangoli AH*b*, *c*HD essendo simili, l' angolo HA*e*=HD*f*; dunque i triangoli AH*e*, DH*f* sono simili; dunque l' angolo AH*e*=DH*f*. Ne segue in primo luogo che *e*H*f* è una linea retta, e che perciò le tre parallele E*e*, GH, F*f* son situate in un medesimo piano, il quale conterrà le due rette EF, GH, dunque *queste*

debbon tagliarsi in un punto M. Dipoi, a cagione delle parallele Ee, MH, Ff, si avrà EM : MF : : eH : Hf : : AH : HD.

Con una costruzione simile, riportata al lato AB, si dimostrerebbe che HM : MG : : AE : EB.

PROPOSIZIONE XVII.

477. Teorema. *L'angolo* (Fig. 193) *compreso fra i due piani* MAN, MAP *può esser misurato, conforme alla Definizione, dall'angolo* NAP, *che fanno fra loro le due perpendicolari* AN, AP *condotte in ciascuno di questi piani all'intersezione comune* AM.

Per dimostrare la legittimità di questa misura, bisogna provare 1.° ch'essa è costante, ossia che sarebbe la medesima da qualunque punto dell'intersezione comune si conducessero le due perpendicolari.

Infatti se si prende un altro punto M, e si conducono MC nel piano MN ed MB nel piano MP perpendicolari all'intersezione comune AM, poichè MB ad AP son perpendicolari a una medesima retta AM, esse son parallele fra loro. Per la medesima ragione MC è parallela ad AN: dunque l'angolo BMC=PAN (473); dunque è indifferente il condurre le perpendicolari dal punto M o dal punto A; l'angolo compreso sarà sempre lo stesso.

2.° Bisogna provare, che se l'angolo dei due piani aumenta, o diminuisce in un certo rapporto, l'angolo PAN aumenterà e diminuirà nel rapporto medesimo.

Nel piano PAN descrivete col centro A e con un raggio a piacere l'arco NDP; col centro M e con un raggio eguale descrivete l'arco CEB; tirate AD a piacimento: i due piani PAN, BMC, essendo perpendicolari ad una medesima retta MA, saran paralleli; dunque le intersezioni AD, ME di questi due piani con un terzo AMD, saran parallele; dunque l'angolo BME sarà eguale a PAD.

Chiamiamo, per un momento, *canto* l'angolo formato da'due piani PM, NN: posto ciò se l'angolo DAP fosse eguale a DAN, è chiaro che il canto DAMP sarebbe eguale al canto DAMN, perchè la base PAD si situerebbe esattamente sulla sua egnale DAN, l'altezza AM sarebbe sempre la stessa: dunque i due canti coinciderebbero l'uno coll'altro. Si vede del pari che se l'angolo DAP fosse contenuto un certo numero preciso di volte nell'angolo PAN, il canto DAMP sarebbe contenuto altrettante volte nel canto PAMN. D'altronde dal rapporto in nomeri interi a un rapporto qualunque la conclusione è legittima, ed è stata dimostrata tale in una circostanza interamente simile (394); dunque, qualunque siasi il rapporto dell'angolo DAP all'angolo PAN, il canto DAMP sarà in questo medesimo rapporto col canto PAMN; dunque l'angolo NAP può esser preso per la misura del canto PAMN, e dell'angolo che fanno fra loro i due piani MAP, MAN.

Scolio. Succede lo stesso circa agli angoli formati da due piani di quel che succede degli angoli formati da due rette. Così, allorchè due piani si tra-

versano scambievolmente, gli angoli opposti al vertice sono eguali, e gli angoli adiacenti equivalgono insieme a due angoli retti; dunque, se un piano è perpendicolare ad un altro, quest' ultimo è perpendicolare al primo. Parimente nell' incontro dei piani paralleli con un terzo piano si hanno le medesime eguaglianze d' angoli, e le medesime proprietà che nell' incontro di due linee parallele con una terza linea.

PROPOSIZIONE XVIII.

478. Teorema. *Essendo la linea* AP (Fig. 194) *perpendicolare al piano* MN, *ogni piano* APB *condotto per* AP *sarà perpendicolare al piano medesimo* MN.

Sia BC l' intersezione dei piani AB, MN; se nel piano MN si conduce DE perpendicolare a BP, la linea AP, essendo perpendicolare al piano MN, sarà perpendicolare a ciascuna delle due rette BC, DE: ma l' angolo APD, formato dalle due perpendicolari PA, PD all' intersezione comune BP, misura l' angolo dei due piani AB, MN; dunque, poichè quest' angolo è retto, i due piani son perpendicolari fra loro.

Scolio. Quando tre linee, come AP, BP, DP, son perpendicolari fra loro, ciascuna di queste linee è perpendicolare al piano delle altre due, e i tre piani son perpendicolari fra loro.

PROPOSIZIONE XIX.

479. Teorema. *Se il piano* AB (Fig. 194) *è perpendicolare al piano* MN *e si conduce nel piano* AB *la linea* PA *perpendicolare all' intersezione comune* PB, *dico che* PA *sarà perpendicolare al piano* MN.

Poichè, se nel piano MN si conduca PD perpendicolare a PB, l'angolo APD sarà retto, giacchè i piani son perpendicolari fra loro: dunque la linea AP è perpendicolare alle due rette PB, PD; dunque è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario. Se il piano AB è perpendicolare al piano MN, e per un punto P dell' intersezione comune si alza una perpendicolare al piano MN, dico che questa perpendicolare sarà nel piano AB; poichè se non vi fosse, si potrebbe condurre nel piano AB all' intersezione comune BP una perpendicolare AP, la quale sarebbe nel medesimo tempo perpendicolare al piano MN; dunque nel medesimo punto P vi sarebbero due perpendicolari al piano MN; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XX.

480. Teorema. *Se due piani* AB, AD (Fig. 194) *son perpendicolari ad un terzo* MN, *la loro intersezione comune* AP *sarà perpendicolare a questo terzo piano.*

Poichè, se pel punto P si alza una perpendicolare al piano MN, questa perpendicolare dee trovarsi ad un tempo nel piano AB e nel piano AD (479); essa dunque è la loro comune intersezione AP.

PROPOSIZIONE XXI.

481. Teorema. *Se un angolo solido è formato da tre angoli piani, la somma di due qualunque di questi angoli sarà maggiore del terzo.*

Non v'è bisogno di dimostrar la Proposizione se non quando l'angolo-piano, che si paragona colla somma degli altri due, è maggiore di ciascuno di questi ultimi. Sia dunque (Fig. 195) l'angolo solido S formato da tre angoli piani ASB, ASC, BSC, e supponiamo che l'angolo ASB sia il più grande dei tre; dico che avremo $ASB<ASC+BSC$.

Nel piano ASB fate l'angolo $BSD=BSC$; tirate a piacere la retta ADB; ed avendo preso $SC=SD$, tirate AC, BC.

I due lati BS, SD sono eguali ai due BS, SC, l'angolo $BSD=BSC$: dunque i due triangoli BSD, BSC sono eguali; dunque $BD=BC$. Ma si ha $AB<AC+BC$; togliendo da una parte BD e dall'altra la sua eguale BC, resterà $AD<AC$. I due lati AS, SD sono eguali ai due AS, SC; il terzo AD è minore del terzo AC; dunque l'angolo $ASD<ASC$. Aggiungendo $BSD=BSC$, si avrà $ASD+BSD$, o $ASB<ASC+BSC$.

PROPOSIZIONE XXII.

482. Teorema. *La somma degli angoli piani, che formano un angolo solido, è sempre minore di quattro angoli retti.*

Tagliate l'angolo solido S (Fig. 196) con un piano qualunque ABCDE; da un punto O preso in questo piano conducete a tutti gli angoli le linee rette OA, OB, OC, OD, OE.

La somma degli angoli de' triangoli ASB, BSC ec., formati intorno al vertice S, equivale alla somma degli angoli dell'egual numero di triangoli AOB, BOC ec., formati intorno al vertice O. Ma al punto B gli angoli ABO, OBC presi insieme fanno l'angolo ABC minor della somma degli angoli ABS, SBC (481); parimente al punto C si ha $BCO+OCD<BCS+SCD$; e così rispetto a tutti gli angoli del poligono ABCDE. Segue da ciò che nei triangoli, il cui vertice è in O, la somma degli angoli alla base è minore della somma degli angoli alla base nei triangoli il cui vertice è in S; dunque in compensazione la somma degli angoli formati intorno al punto O è maggiore della somma degli angoli intorno al punto S. Ma la somma degli angoli intorno al punto O è eguale a quattro angoli retti; dunque la somma degli angoli piani che formano l'angolo solido S, è minore di quattro angoli retti.

Scolio. Questa dimostrazione suppone che l'angolo solido sia *convesso*, ovvero che il piano d'una faccia prolungato non possa mai tagliare l'angolo soli-

do: se fosse altrimenti, la somma degli angoli piani non avrebbe più limiti, e potrebb' essere d' una grandezza qualunque.

PROPOSIZIONE XXIII.

483. Teorema. *Se due angoli solidi son composti di tre angoli piani respettivamente eguali, i piani nei quali sono gli angoli eguali, saranno egualmente inclinati fra loro.*

Sia (Fig. 197) l'angolo ASC=DTF, l'angolo ASB=DTE, e l'angolo BSC=ETF; dico che i due piani ASC, ASB avranno fra loro una inclinazion' eguale a quella dei due piani DTF, DTE.

Avendo preso SB a piacere, conducete BO perpendicolare al piano ASC; dal punto O, dove questa perpendicolare incontra il piano, conducete OA, OC perpendicolari sopra SA, SC; tirate AB, BC; prendete dipoi TE=SB; conducete EP perpendicolare sul piano DTF; dal punto P conducete PD, PF perpendicolari sopra TD TF; infine tirate DE, EF.

Il triangolo SAB è rettangolo in A, ed il triangolo TDE in D (466); e poichè l'angolo ASB=DTE, si ha pure SBA=TED. D'altronde SB=TE; dunque il triangolo SAB è eguale al triangolo TDE; dunque SA=TD ed AB=DE. Si dimostrerà similmente che SC=TF e BC=EF. Posto ciò, il quadrilatero SAOC è eguale al quadrilatero TDPF; poichè ponendo l'angolo ASC sul suo eguale DTF, a cagione di SA=TD e di SC=TF, il punto A cadrà in D, ed il punto C in F. Nel medesimo tempo AO perpendicolare a SA cadrà sopra DP perpendicolare a TD, e parimente OC sopra PF; dunque il punto O cadrà sul punto P, e si avrà AO=DP. Ma i triangoli AOB, DPE son rettangoli in O e P, l'ipotenusa AB=DE e il lato AO=DP, dunque questi triangoli son eguali; dunque l'angolo AOB=PDE. L'angolo OAB è l'inclinazione dei due piani ASB, ASC; l'angolo PDE è quella dei due piani DTE, DTF; dunque queste due inclinazioni sono eguali fra loro.

Scolio. Se due angoli solidi son composti di tre angoli piani respettivamente eguali, e se al tempo stesso gli angoli eguali od omologhi sono *disposti nella stessa maniera* nei due angoli solidi, allora questi angoli solidi saranno egnali, e posti l'uno sull'altro coincideranno. Infatti si è già veduto che il quadrilatero SAOC può esser situato sul suo eguale TDPF; così situato SA sopra TD, SC cade sopra TF e il punto O sul punto P. Ma a cagione dell'eguaglianza dei triangoli AOB, DPE, la OB perpendicolare al piano ASC è eguale alla PE perpendicolare al piano TDF; di più queste perpendicolari son dirette nel medesimo senso; dunque il punto B cadrà sul punto E, la linea retta SB sopra TE, ed i due angoli solidi coincideranno interamente l'uno coll'altro.

Questa coincidenza però non ha luogo se non che supponendo che gli angoli piani eguali siano *disposti nella maniera medesima* nei due angoli solidi; poichè, se gli angoli piani eguali fosser *disposti in un ordine inverso*, o, il che torna lo stesso, se le perpendicolari OB, PE, in vece d'esser dirette nel medesimo senso per rapporto ai piani ASC, DTF, fosser dirette in sensi contrarj, al-

lora sarebbe impossibile di far coincidere i due angoli solidi l'uno coll'altro. Non sarebbe però meno vero, conforme al Teorema, che i piani, nei quali sono gli angoli eguali, fossero egualmente inclinati fra loro; talmente che i due angoli solidi sarebbero eguali in tutte le loro parti costituenti, senza però poter essere sapprapposti. Questa specie d'eguaglianza, che non è assoluta o di soprapposizione, merita d'esser distinta con una denominazione particolare; noi la chiameremo *eguaglianza per simmetria.*

Così i due angoli solidi, di cui si tratta, i quali son formati da tre angoli piani respettivamente eguali, ma disposti in un ordine inverso, si chiameranno *angoli eguali per simmetria*, o semplicemente *angoli simmetrici.*

La medesima osservazione s'applica agli angoli solidi formati da più di tre angoli piani: così un angolo solido formato dagli angoli piani A, B, C, D, E, ed un altro angolo solido formato dai medesimi angoli in un ordine inverso A, E, D, C, B posson essere tali che i piani, nei quali sono gli angoli eguali, siano egualmente inclinati fra loro. Questi due angoli solidi, che sarebbero eguali senza che fosse possibile la lor soprapposizione, si chiameranno *angoli solidi eguali per simmetria* o *angoli solidi simmetrici.*

Nelle Figure piane propriamente non vi è eguaglianza per simmetria, e tutte quelle che si volessero chiamar così, sarebbero eguaglianze assolute o di soprapposizione: la ragione è questa, che si può rovesciare una Figura piana, e prendere indifferentemente il di sopra pel di sotto. Accade diversamente nei solidi, ove la terza dimensione può esser presa in due sensi diversi.

PROPOSIZIONE XXIV.

484. Problema. *Essendo dati tre angoli piani, che formano un angolo solido, trovare con una costruzione piana l'angolo che due di questi piani fanno fra loro.*

Sia S (Fig. 198) l'angolo solido proposto, nel quale si conoscano i tre angoli piani ASB, ASC, BSC; si cerca l'angolo che fanno fra loro due di questi piani, per esempio, i piani ASB, ASC.

Immaginiamo che si sia fatta la stessa costruzione come nel Teorema precedente; l'angolo OAB sarebbe l'angolo richiesto. Si tratta dunque di trovare il medesimo angolo con una costruzione piana o fatta sopra un piano.

A tal oggetto fate sopra un piano gli angoli B'SA. ASC, B''SC eguali agli angoli BSA, ASC, BSC della Figura solida; prendete B'S e B''S eguali ciascuna a BS della Figura solida; dai punti B' e B'' abbassate B'A e B''C perpendicolari sopra SA e SC, che s'incontreranno in un punto O. Dal punto A, come centro e col raggio AB' descrivete la mezza-circonferenza B'*b*E; dal punto O alzate sopra B'E la perpendicolare in O*b*, che incontri la circonferenza in *b*; tirate A*b*; e l'angolo EA*b* sarà l'inclinazione cercata dei due piani ASC, ASB nell'angolo solido.

Tutto riducesi a far vedere, che il triangolo AO*b* della Figura piana è

eguale al triangolo AOB della Figura solida. Ora i due triangoli B'SA, BSA son rettangoli in A e gli angoli in S sono eguali; dunque gli angoli in B e B' son parimente eguali. Ma l'ipotenusa SB' è eguale all'ipotenusa SB; dunque questi triangoli sono eguali, dunque SA della Figura piana è eguale a SA della Figura solida, ed anche AB', o la sua eguale A*b* nella Figura piana, è eguale ad AB nella Figura solida. Si dimostrerà parimente che SC è eguale dalle due parti; d'onde ne segue che il quadrilatero SAOC è eguale in ambedue le Figure e che così AO della Figura piana è eguale ad AO della Figura solida: dunque nell'una e nell'altra i triangoli rettangoli AO*b*, AOB hanno l'ipotenusa eguale, ed un lato eguale; dunque sono eguali, e l'angolo EA*b* trovato colla costruzione piana è eguale all'inclinazione dei due piani, o fasce SAB, SAC dell'angolo solido.

Quando il punto O cade fra A e B' nella Figura piana, l'angolo EA*b* diventa ottuso e misura sempre la vera inclinazione dei piani; perciò si è indicata con EA*b* e non con OA*b* l'inclinazione richiesta, affinchè la medesima soluzione convenga a tutti i casi senza eccezione.

Scolio. Si può domandare se, prendendo tre angoli piani a piacere, si potrà formare con questi tre angoli piani un angolo solido.

Primieramente bisogna che la somma dei tre angoli dati sia minore di quattro angoli retti, senza di che l'angolo solido non può esser formato (482): bisogna di più che dopo aver preso due degli angoli a piacimento B'SA, ASC, il terzo CSB" sia tale che la perpendicolare B"C al lato SC incontri il diametro B'E fra le sue estremità B' ed E. Così i limiti della grandezza dell'angolo CSB" sono quelli, che fanno passare la perpendicolare B"C pei punti B' ed E. Da questi punti abbassate sopra SC le perpendicolari B'I, EK che incontrino in I e K la circonferenza descritta col raggio SB'; ed i limiti dell'angolo CSB" saranno CSI e CSK.

Ma nel triangolo isoscele B'SI la linea CS prolungata essendo perpendicolare alla base B'I, si ha l'angolo CSI=CSB'=ASC+ASB'. E nel triangolo isoscele ESK, essendo la linea SC perpendicolare ad EK, si ha l'angolo CSK=CSE. D'altronde, a cagione dei triangoli eguali ASE, ASB', l'angolo ASE=ASB': dunque CSE o CSK=ASC—ASB'.

Risulta da ciò che il problema sarà possibile ogni volta che il terzo angolo CSB" sarà minor della somma degli altri due ASC, ASB', e maggiore della loro differenza; condizione che si accorda col Teorema XXI, poichè, in virtù di esso Teorema, bisogna che si abbia CSB"<ASC+ASB'; bisogna pure che si abbia ASC<CSB"+ASB', o CSB">ASC—ASB'.

PROPOSIZIONE XXV.

485. PROBLEMA. *Essendo dati due dei tre angoli piani, che formano un angolo solido, coll'angolo che i loro piani fanno tra loro, trovare il terzo angolo piano.*

Siano ASC, ASB' (Fig. 198) i due angoli piani dati, e supponiamo, per un

momento, che CSB'' sia il terzo angolo che si cerca; allora, facendo la medesima costruzione che nel Problema precedente, l'angolo compreso tra i piani dei due primi sarebbe EA*b*. Ora nello stesso modo che si determina l'angolo EA*b* col mezzo di CSB'' essendo dati gli altri due, così si può determinare CSB'' col mezzo di EA*b*; il che risolverà il Problema proposto.

Avendo preso SB' a piacere, abbassate sopra SA la perpendicolare indefinita B'E; fate l'angolo EA*b* eguale all'angolo dei due piani dati; dal punto *b*, ove il lato A*b* incontra la circonferenza descritta col centro A e col raggio AB', abbassate sopra AE la perpendicolare *b*O, e dal punto O abbassate sopra SC la perpendicolare indefinita OCB'', che terminerete in B'' di modo che SB''=SB' l'angolo CSB'' sarà il terzo angolo piano richiesto.

Perchè, se si forma un angolo solido coi tre angoli piani B'SA, ASC, CSB'', l'inclinazione dei piani, ove sono gli angoli dati ASB, ASC sarà eguale all'angolo dato EA*b*.

Scolio. Se un angolo solido è *quadruplo* (Fig. 199), o formato da quattro angoli piani ASB, BSC, CSD, DSA, la cognizione di questi angoli non basta per determinare le inclinazioni scambievoli dei loro piani; poichè coi medesimi angoli piani si potrebbe formare un' infinità di angoli solidi. Ma, se si aggiunga una condizione, per esempio, se sia data l'inclinazion dei due piani ASB, BSC, allora l'angolo solido è intieramente determinato, e si potrà trovare l'inclinazione di due qualunque dei suoi piani. Infatti immaginate un angolo solido *triplo* formato dagli angoli piani ASB, BSC, ASC; i due primi angoli sono dati, come pure l'inclinazione dei loro piani; si potrà dunque determinare mediante il Problema, che si è adesso risoluto, il terzo angolo ASC. Dipoi, se si considera l'angolo solido triplo formato dagli angoli piani ASC, ASD, DSC, questi tre angoli sono cogniti; laonde l'angolo solido è interamante determinato. Ma l'angolo solido quadruplo è formato dalla riunione dei due angoli solidi tripli, di cui parliamo: dunque, poichè questi angoli parziali son noti e determinati, l'angolo totale sarà parimente noto e determinato.

L'angolo dei due piani ASD, DSC si troverebbe immediatamente col mezzo del secondo angolo solido parziale. In quanto all'angolo dei due piani BSC, CSD bisognerebbe in un angolo solido parziale cercar l'angolo compreso fra i due piani ASC, DSC, e nell'altro l'angolo compreso fra i due piani ASC, BSC; la somma di questi due angoli formerebbe l'angolo compreso fra i piani BSC, DSC.

Si troverà nella stessa maniera che, per determinare un angolo solido quintuplo, bisogna conoscere, oltre ai cinque angoli piani che lo compongono, due delle inclinazioni scambievoli dei loro piani; ne bisognerebbero tre per l'angolo solido sestuplo; e così di seguito.

LIBRO SESTO.

I POLIEDRI.

486. Definizioni. i. Si chiama *solido poliedro*, o semplicemente *poliedro* ogni solido terminato da piani o facce piane. (Questi piani stessi sono necessariamente terminati da linee rette). Si chiama in particolare *tetraedro* il solido che ha quattro facce; *essaedro* quello che ne ha sei; *ottaedro* quello che ne ha otto; *dodecaedro* quello che ne ha dodici; *icosaedro* qnello che ne ha venti, ec.

Il tetraedro è il poliedro più semplice, perchè bisognano almeno tre piani per formare un angolo solido, e questi tre piani lasciano nn vuoto che, per esser chiuso, esige almeno nn quarto piano.

ii. L'intersezione comune di due facce adiacenti d'un poliedro, si chiama *lato* o *costola* del poliedro.

iii. Si chiama *poliedro regolare* quello di cui tutte lo facce son poligoni regolari eguali, e di cui tutti gli angoli solidi son eguali fra loro. Questi poliedri sono in numero di cinque. *Vedete l'Appendice ai Libri* VI *e* VII.

iv. Il *prisma* è un solido compreso da più piani parallelogrammi terminati da una parte e dall'altra da due piani poligoni eguali e paralleli.

Per costruir questo solido, sia ABCDE (Fig. 200) un poligono qualunque: se in un piano parallelo ad ABC si conducon le linee FG, GH, HI, ec. eguali e parallele ai lati AB, BC, CD, ec., si formerà con queste il poligono FGHIK eguale ad ABCDE; se in seguito si uniscon da un piano all'altro i vertici degli angoli omologhi con le rette AF, BG, CH, ec., le facce ABGF, BCHG, ec. saranno parallelogrammi, ed il solido così formato ABCDEFGHIK sarà un prisma.

v. I poligoni egnali e paralleli ABCDE, FGHIK si chiamano lo *basi del prisma;* gli altri piani parallelogrammi presi insieme costituiscono ciò che si chiama la *superficie laterale* o *convessa* del *prisma*. Le rette eguali AF, BG, CH ec. si chiamano i *lati* del prisma.

vi. L'*altezza d'un prisma* è la distanza tra le sue due basi, o la perpendicolare abbassata da nn punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

vii. Un *prisma* è *retto* allorchè i suoi lati AF, BG ec. son perpendicolari ai piani delle basi; allora ciascuno di questi lati è eguale all'altezza del prisma. In ogni altro caso il prisma è *obliquo*, e l'altezza è minore del lato.

viii. Un *prisma* è *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagono*, *esagono* ec. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono ec.

ix. Il prisma che ha per base un parallelogrammo, ha tutte le sue facce parallelogramme e si chiama *parallelepipedo*. Il *parallelepipedo* è *rettangolo* allorchè tutte le sue facce sono rettangoli.

x. Tra i parallelepipedi rettangoli si distingue il *cubo* o essaedro regolare che è racchiuso da sei quadrati eguali.

xi. La *piramide* (Fig. 196) è il solido che vien formato quando più piani triangolari partono da un medesimo punto S, e son terminati ai differenti lati d'un medesimo piano poligono ABCDE. Il poligono ABCDE si chiama la *base* della piramide; il punto S n'è il *vertice*, e il complesso dei triangoli ASB, BSC ec. forma la *superficie convessa* o *laterale* della piramide.

xii. L'*altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base, prolungato se occorra.

xiii. La piramide è *triangolare*, *quadrangolare*, ec. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero ec.

xiv. Una piramide è *regolare* quando la base è un poligono regolare e nel tempo stesso la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base passa pel centro di essa base: questa linea si chiama allora l'*asse* della piramide.

xv. *Diagonale* d'un poliedro è la retta che unisce i vertici di due angoli solidi non adiacenti.

xvi. Chiamerò *poliedri simmetrici* due poliedri i quali, avendo una base comune, sono costrutti similmente, uno al di sopra del piano di questa base, l'altro al di sotto, con questa condizione che i vertici degli angoli solidi omologhi siano situati ad eguali distanze dal piano della base sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano. Per esempio, se la retta ST (Fig. 202) è perpendicolare al piano ABC, e se nel punto O, ov'essa incontra questo piano, è divisa in due parti eguali, le due piramidi SABC, TABC che hanno la base comune ABC saranno due poliedri simmetrci.

xvii. Due *piramidi triangolari* son *simili* quando hanno due facce respettivamente simili, similmente disposte ed egualmente inclinate fra loro. Così. supponiamo (Fig. 203) gli angoli ABC=DEF, BAC=EDF, ABS=DET, BAS=EDT, se in oltre l'inclinazione dei piani ABS, ABC, è eguale a quella dei loro omologhi DTE, DEF, le piramidi SABC, TDEF saranno simili.

xviii. Avendo formato un triangolo, unendo i vertici di tre angoli presi sopra una medesima faccia o base di un poliedro, si può immaginare che i vertici dei differenti angoli solidi del poliedro, situati fuori del piano di questa base, sian quelli d'altrettante piramidi triangolari che hanno per base comune il triangolo indicato; e ciascuna di queste piramidi determinerà la posizione di ciascun angolo solido del poliedro per rapporto alla base. Posto ciò:

Due *poliedri* son *simili* quando, avendo basi simili, i vertici degli angoli solidi omologhi fuori di queste basi sono determinati da piramidi triangolari respettivamente simili.

xix. Chiamerò *vertici* d'un poliedro i punti situati ai vertici dei suoi differenti angoli solidi.

PROPOSIZIONE I.

487. Teorema. *Due poliedri non possono avere i medesimi vertici e nel medesimo numero senza coincidere l' uno coll' altro.*

Poichè supponiamo uno dei poliedri già costrutto; se si vuol costruire un altro che abbia i medesimi vertici e nel medesimo numero, bisognerà che i piani di quest' ultimo non passino tutti pei medesimi punti per cui passano nel primo; senza di che non differirebbero l'uno dall'altro: ma allora è chiaro che alcuni dei nuovi piani taglierebbero il primo poliedro; vi sarebbero dei vertici al di sopra di questi piani e dei vertici al di sotto; il che non può convenire a un poliedro convesso: dunque, se due poliedri hanno i medesimi vertici e nel medesimo numero, essi debbono necessariamente coincidere l'uno con l' altro.

Scolio. Essendo dati di posizione (Fig. 204) i punti A, B, C, K ec. che debbon servire di vertici a un poliedro, è facile descrivere il poliedro.

Scegliete prima tre vertici vicini D, E, H tali che il piano DEH passi, se ciò ha luogo, per dei nuovi vertici K, C, ma lasci tutti gli altri da una medesima parte, cioè tutti al di sopra del piano o tutti al di sotto; il piano DEH o DEHKC così determinato sarà una faccia del solido. Per uno de' suoi lati EH conducete un piano che farete girare finchè incontri un nuovo vertice F, o più insieme F, I; avrete una seconda faccia che sarà FEH o FEHI. Continuate così, facendo passare dei piani pei lati trovati finchè il solido sia terminato da tutte le parti; questo solido sarà il poliedro richiesto, perchè non ve ne son due che possan passare pei medesimi vertici.

PROPOSIZIONE II.

488. Teorema. *In due poliedri simmetrici le facce omologhe sono respettivamente eguali: e l' inclinazione di due facce adiacenti in uno di questi solidi è eguale all' inclinazione delle facce omologhe nell' altro.*

Sia ABCDE (Fig. 205) la base comune ai due poliedri; siano M ed N i vertici di due angoli solidi qualunque d' uno dei poliedri; M' ed N' i vertici omologhi dell' altro poliedro; bisognerà, seguendo la Definizione, che le rette MM', NN' siano perpendicolari al piano ABC, e che siano divise in due parti eguali nei punti *m* ed *n*, ove incontrano questo piano. Posto ciò, dico che la distanza MN è eguale ad M'N'.

Poichè, se si fa girare il trapezio *m*M'N'*n* intorno ad *mn* finchè il suo piano si applichi al piano *m*MN*n*, a cagione degli angoli retti in *m* ed in *n*, il lato *m*M' cadrà sul suo eguale *m*M ed *n*N' sopra *n*N; dunque i due trapezj coincideranno, e si avrà MN=M'N'.

Sia P un terzo vertice del poliedro superiore e P' il suo omologo nell'altro; si avrà pure MP=M'P' ed NP=N'P'; dunque *il triangolo* MNP *che unisce tre vertici qualunque del poliedro superiore, è eguale al triangolo* M'N'P' *che*

unisce i tre vertici omologhi dell'altro poliedro. Se ora tra questi triangoli si considerano soltanto quelli che sono formati alla superficie dei poliedri, si può già conchiudere che le superficie dei due poliedri son composte d'un medesimo numero di triangoli respettivamente eguali.

Dico adesso che, se alcuni di questi triangoli sono in un medesimo piano sopra una superficie e formano una medesima faccia poligona, i triangoli omologhi saranno in un medesimo piano sopra l'altra superficie, e formeranno una faccia poligona eguale.

Infatti siano MPN, NPQ due triangoli adiacenti che si suppongono in uno stesso piano; e siano M'P'N', N'P'Q' i loro omologhi. Si ha l'angolo MNP= M'N'P'; l'angolo PNQ=P'N'Q'; e, se si tirano MQ ed M'Q', il triangolo MNQ sarebbe eguale ad M'N'Q'; perciò si avrebbe l'angolo MNQ=M'N'Q'. Ma poichè MPNQ è un solo piano, si ha l'angolo MNQ=MNP+PNQ; dunque si avrà pure M'N'Q'=M'N'P'+P'N'Q'. Ora, se i tre piani M'N'P', P'N'Q', M'N'Q' non fossero confusi in un solo, questi tre piani formerebbero un angolo solido, e si avrebbe (481) l'angolo M'N'Q'<M'N'P'+P'N'Q'; dunque, poichè questa condizione non ha luogo, i due triangoli M'N'P', P'N'Q' sono in un medesimo piano.

Segue da ciò che ciascuna faccia, o triangolare o poligona, d'un poliedro corrisponde a una faccia eguale nell'altro, e che perciò i due poliedri son formati da un medesimo numero di piani respettivamente eguali.

Resta a provare che l'inclinazione di due facce adiacenti qualunque in uno dei poliedri è eguale all'inclinazione delle facce omologhe nell'altro.

Siano MPN, NPQ due triangoli formati sulla costola comune NP nei piani di due facce adiacenti; sieno M'P'N', N'P'Q' i loro omologhi: si può concepire in N un angolo solido formato dai tre angoli piani MNQ, MNP, PNQ; e in N' un angolo solido formato dai tre M'N'Q', M'N'P', P'N'Q'. Ora abbiamo già dimostrato che questi angoli piani son respettivamente eguali; dunque l'inclinazione dei due piani MNP, PNQ è eguale a quella dei loro omologhi M'N'P', P'N'Q' (483).

Dunque nei poliedri simmetrici le facce sono respettivamente eguali, e i piani di due facce qualunque adiacenti d'uno dei solidi hanno tra loro la medesima inclinazione che i piani di due facce omologhe dell'altro solido.

Scolio. Si può osservare *che gli angoli solidi di un poliedro sono i simmetrici degli angoli solidi dell'altro poliedro:* poichè, se l'angolo solido N è formato dai piani MNP, PNQ, QNR, ec., il suo omologo N' è formato dai piani M'N'P', P'N'Q', Q'N'R' ec. Questi sembrano disposti nel medesim'ordine degli altri; ma, siccome i due angoli solidi sono in una situazione inversa l'uno per rapporto all'altro, ne segue che la disposizione reale dei piani che formano l'angolo solido N', è l'inversa di quella che ha luogo nell'angolo omologo N. D'altronde le inclinazioni dei piani consecutivi sono eguali nell'uno e nell'altro angolo solido; dunque questi angoli solidi son simmetrici l'uno dell'altro.

Questa osservazione prova che *un poliedro qualunque non può avere che un solo poliedro simmetrico.* Poichè, se si costruisse sopra un'altra base un nuovo

poliedro simmetrico del poliedro dato, gli angoli solidi di quest' ultimo sarebbero sempre simmetrici cogli angoli del poliedro dato; dunque sarebbero eguali a quelli del poliedro simmetrico costrutto sulla prima base. D'altronde le facce omologhe sarebbero sempre eguali; dunque questi due poliedri simmetrici costrutti sopra una base o sopra un'altra avrebbero le facce eguali e gli angoli solidi eguali; essi dunque coinciderebbero mediante la soprapposizione e non formerebbero che un solo e medesimo poliedro.

PROPOSIZIONE III.

489. Teorema. *Due prismi sono eguali allorchè hanno un angolo solido compreso fra tre piani respettivamente eguali e similmente disposti.*

Sia (Fig. 200) la base ABCDE eguale alla base *abcde*, il parallelogrammo ABGF eguale al parallelogrammo *abgf*, e il parallelogrammo BCHG eguale al parallelogrammo *bchg*; dico che il prisma ABCI sarà eguale al prisma *abci*.

Poichè, se sia situata la base ABCDE sulla sua eguale *abcde*, queste due basi coincideranno, ma i tre angoli piani che formano l'angolo solido B, sono respettivamente eguali ai tre angoli piani che formano l'angolo solido *b*, cioè ABC=*abc*, ABG=*abg* e GBC=*gbc*; di più questi angoli son similmente disposti; dunque gli angoli solidi B e *b* sono eguali e per conseguenza il lato BG cadrà sul suo eguale *bg*. Si vede pure che, a cagione dei parallelogrammi eguali ABGF, *abgf*, il lato GF cadrà sul suo eguale *gf* e similmente GH sopra *gh*; dunque la base superiore FGHIK coinciderà interamente colla sua eguale *fghik*, ed i due solidi saranno confusi in un solo, poichè avranno i medesimi vertici.

Corollario. Due prismi retti che hanno basi eguali ed altezze eguali, sono eguali. Perchè avendo il lato AB eguale ad *ab* e l'altezza BG eguale a *bg*; il rettangolo ABGF sarà eguale al rettangolo *abgf*; sarà lo stesso dei rettangoli BGHC, *bghc*; così i tre piani che formano l'angolo solido B, sono eguali ai tre che forman l'angolo solido *b*. Dunque i due prismi sono eguali.

PROPOSIZIONE IV.

490. Teorema. *In ogni parallelepipedo i piani opposti sono eguali e paralleli.*

Poichè, secondo la Definizione di questo solido, le basi ABCD, EFGH (Fig 206) son parallelogrammi eguali e i loro lati son paralleli; resta dunque a dimostrare che la medesima cosa ha luogo per due facce laterali opposte, come AEHD, BFGC. Ora AD è eguale e parallela a BC, giacchè la Figura ABCD è un parallelogrammo; per una simil ragione AE è eguale e parallela a BF: dunque l'angolo DAE è eguale all'angolo CBF e il piano DAE parallelo a CBF; dunque anche il parallelogrammo DAEH è eguale al parallelogrammo CBFG. Si dimostrerà del pari che i parallelogrammi ABFE, DCGH sono eguali e paralleli.

Corollario. Poichè il parallelepipedo è un solido compreso da sei piani di cui gli opposti sono eguali e paralleli, ne segue che una faccia qualunque e la sua opposta posson esser prese per le basi del parallelepipedo.

Scolio. Essendo date tre rette AB, AE, AD che passino per un medesimo punto A e faccian fra loro degli angoli dati, si può su queste tre rette costruire un parallelepipedo: a tal effetto bisogna condurre dall'estremità di ciascuna retta un piano parallelo al piano delle altre due, cioè, pel punto B un piano parallelo a DAE, pel punto D un piano parallelo a BAE e pel punto E un piano parallelo a BAD. Gli incontri scambievoli di questi piani formeranno il parallelepipedo richiesto.

PROPOSIZIONE V.

491. Teorema. *In ogni parallelepipedo gli angoli solidi opposti son simmetrici l'uno dell'altro, e le diagonali condotte dai vertici di questi angoli si tagliano scambievolmente in due parti eguali.*

Paragoniamo, per esempio, l'angolo solido A (Fig 206) al suo opposto G; l'angolo EAB eguale ad EFB è pure eguale ad HGC, l'angolo DAE=DHE=CGF e l'angolo DAB=DCB=HGF; dunque i tre angoli piani che formano l'angolo solido A, sono respettivamente eguali ai tre che formano l'angolo solido G; d'altronde è facil vedere che la loro disposizione è differente nell'uno e nell'altro; dunque 1.° i due angoli A e G sono simmetrici l'uno dell'altro (483).

In secondo luogo immaginiamo due diagonali EC, AG condotte entrambe da vertici opposti; poichè AE è eguale e parallela a CG, la Figura AEGC è un parallelogrammo; dunque le diagonali EC, AG si taglieranno scambievolmente in due parti eguali. Si dimostrerà parimente che la diagonale EC, ed un'altra DF si taglieranno pure in due parti eguali: dunque 2.° le quattro diagonali si taglieranno scambievolmente in due parti eguali nel medesimo punto che si può riguardare come il centro del parallelepipedo.

PROPOSIZIONE VI.

492. Teorema. *Il piano* BDHF (Fig. 207), *che passa per due costole parallele opposte* BF, DH, *divide il parallelepipedo* AG *in due prismi triangolari* ABDHEF, GHFBCD *simmetrici l'uno dell'altro.*

In primo luogo questi due solidi sono prismi, perchè i triangoli ABD, EFH, avendo i loro lati eguali e paralleli, sono eguali e nel tempo stesso le facce laterali ABFE, ADHE, BDHF son parallelogrammi; dunque il solido ABDHEF è un prisma: lo stesso è del solido GHFBCD. Dico adesso che questi due prismi son simmetrici l'un dell'altro.

Sulla base ABD fate il prisma ABDE'F'H' che sia simmetrico del prisma ABDEFH. Secondo ciò che si è dimostrato (488), il piano ABF'E' è eguale ad ABFE, ed il piano ADH'E' è eguale ad ADHE: ma, se si paragona il pri-

sma GHFBCD col prisma ABDH'E'F', la base GHF è eguale ad ABD, il parallelogrammo GHDC, che è eguale ad ABFE, è pure eguale ad ABF'E', e il parallelogrammo GFBC, che è eguale ad ADHE, è eguale ancora ad ADH'E'; dunque i tre piani che formano l'angolo solido G nel prisma GHFBCD, son respettivamente eguali ai tre piani che formano l'angolo solido A nel prisma ABDH'E'F'; essi d'altronde son disposti similmente: dunque quei due prismi sono eguali (489): e potrebbero essere soprapposti. Ma uno di essi ABDH'E'F' è simmetrico del prisma ABDHEF; dunque l'altro GHFBCD è pure simmetrico di ABDHEF.

PROPOSIZIONE VII.

493. Lemma. *In qualunque prisma* ABCI (Fig. 201) *le sezioni* NOPQR. STVXY *fatte da piani paralleli son poligoni eguali.*

Poichè i lati NO, ST son paralleli, essendo le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano ABGF; e questi medesimi lati NO, ST son compresi tra le parallele NS, OT che son lati pel prisma; dunque NO è eguale ad ST. Per una simil ragione, i lati OP, PQ, QR ec. della sezione NOPQR son respettivamente eguali ai lati TV, VX, XY ec. della sezione STVXY. D'altronde i lati eguali essendo nel medesimo tempo paralleli, ne segue che gli angoli NOP, OPQ ec. della prima sezione son respettivamente eguali agli angoli STV, TVX ec. della seconda. Dunque le due sezioni NOPQR, STVXY son poligoni eguali.

Corollario. Ogni sezione fatta in un prisma parallelamente alla sua base è eguale a questa base.

PROPOSIZIONE VIII.

494. Teorema. *I due prismi* (Fig. 208) *triangolari simmetrici* ABDHEF, BCDHGF, *nei quali si decompone il parallelepipedo* AG, *sono equivalenti tra loro.*

Per i vertici B ed F conducete perpendicolarmente al lato BF i piani B*adc*, F*ehg* che incontreranno da una parte in *a*, *d*, *c*, e dall'altra in *e*, *h*, *g* i tre altri lati AE, DH, CG dello stesso parallelepipedo; le sezioni B*adc*, F*ehg* saranno parallelogrammi eguali. Queste sezioni sono eguali perchè son fatte da piani perpendicolari ad una medesima retta, e per conseguenza paralleli; esse sono parallelogrammi perchè due lati opposti d'una medesima sezione *a*B, *dc* son le intersezioni de' due piani paralleli ABFE, DCGH fatte da un medesimo piano.

Per una simil ragione, la Figura B*ae*F è un parallelogrammo, come pure le altre facce laterali BF*gc*, *cdhg*, *adhe* del solito B*adc*F*ehg*: dunque questo solido è una prisma (486. IV), e questo prisma è retto, poichè il lato BF è perpendicolare al piano della base.

Ciò posto, se col piano BFHD si divida il prisma retto B*h* in due prismi

triangolari retti *aBdcFh*, *BdcFhg*, dico che il prisma triangolare obliquo ABDEFH sarà equivalente al prisma triangolare retto *aBdeFh*.

Infatti questi due prismi avendo una parte comune ABD*hc*F, basterà provare che le parti rimanenti, cioè i solidi B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, sono equivalenti tra loro. Ora, a causa dei parallelogrammi ABFE. *o*BF*e*, i lati AE, *ae*, eguali al lor parallelo BF, sono eguali tra loro; così togliendone la parte comune A*e*, resterà A*a*=E*e*. Proverebbesi parimente che D*d*=H*h*.

Adesso, per eseguir la soprapposizione dei due solidi B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, poniamo la base F*eh* sopra la sua eguale B*ad*: allora il punto *e* cadendo in *a*, ed il punto *h* in *d*, i lati *e*E, *h*H cadranno sopra i loro eguali *a*A, *d*D, poichè essi son perpendicolari al medesimo piano B*ad*. Dunque i due solidi di cui si tratta, coincideranno interamente l'uno con l'altro; dunque il prisma obliquo BADFEH è equivalente al prisma retto B*ad*F*eh*.

Si dimostrerà similmente che il prisma obliquo BDCFHG è equivalente al prisma retto B*dc*F*hg*. Ma i due prismi retti B*ad*F*eh*, B*dc*F*hg* son eguali tra loro, poichè hanno la medesima altezza BF, e le loro basi B*ad*, B*dc* son metà di un medesimo parallelogrammo (489). Dunque i due prismi triangolari BADFEH, BDCFHG equivalenti a prismi eguali sono equivalenti tra loro.

Corollario. Ogni prisma triangolare ABDHEF è la metà del parallelepipedo AG costrutto sul medesimo angolo solido A con le medesime costole AB, AD, AE.

PROPOSIZIONE IX.

495. Teorema. *Se due parallelepipedi* AG, AL (Fig. 209) *abbiano una base comune* ABCD, *e se le lor basi superiori* EFGH, IKLM *siano comprese in un medesimo piano e tra le medesime parallele* EK, HL, *questi due parallelepipedi saranno equivalenti fra loro.*

Possono accadere tre casi, secondo che EI è maggiore, minore o eguale ad EF, ma la dimostrazione è la stessa per tutti; e in primo luogo dico che il prisma triangolare AEIDHM è eguale al prisma triangolare BFKCGL.

Infatti, poichè AE è parallela a BF ed HE a GF, l'angolo AEI=BFK, HEI=GFK ed HEA=GFB. Di questi sei angoli i primi tre formano l'angolo solido E, gli altri tre formano l'angolo solido F; dunque, poichè gli angoli piani son respettivamante eguali e similmente disposti, ne segue che gli angoli solidi E ed F sono eguali. Adesso, se si pone il prisma AEM sul prisma BFL, e in primo luogo la base AEI sulla base BFK, queste due basi essendo eguali coincideranno; e poichè l'angolo solido E è eguale all'angolo solido F, il lato EH cadrà sul suo eguale FG: altro non bisogna di più per provare che i due prismi coincideranno in tutta la loro estensione, perchè la base AEI e la costola EH determinano il prisma AEM, come la base BFK e la costola FG determinano il prisma BFL (489); dunque questi prismi son eguali.

Ma, se dal solido AL si toglie il prisma AEM, resterà il parallelepipedo AIL; e, se dallo stesso solido AL si toglie il prisma BFL, resterà il pa-

rallelepipedo AEG; dunque i due parallelepipedi AIL, AEG sono equivalenti fra loro.

PROPOSIZIONE X.

496. Teorema. *Due parallelepipedi della medesima base e della medesima altezza sono equivalenti fra loro.*

Sia ABCD (Fig. 210) la base comune ai due parallelepipedi AG, AL; poichè hanno la medesima altezza, le loro basi superiori EFGH, IKLM saranno nel medesimo piano. Di più i lati EF ed AB sono eguali e paralleli, come pure IK ed AB; dunque EF è eguale e parallela ad IK: per una simil ragione GF è eguale e parallela a LK. Siano prolungati i lati EF, HG, come pure LK, IM, finchè gli uni e gli altri formino colle loro intersezioni il parallelogrammo NOPQ; è chiaro che questo parallelogrammo sarà eguale a ciascuna delle basi EFGH, IKLM. Ora, se s'immagina un terzo parallelepipedo, che colla medesima base inferiore ABCD abbia per base superiore NOPQ, questo terzo parallelepipedo sarà equivalente al parallelepipedo AG (495), poichè avendo la stessa base inferiore, le basi superiori son comprese in un medesimo piano e fra le parallele GQ, FN. Per la medesima ragione questo terzo parallelepipedo sarà equivalente al parallelepipedo AL. Dunque i due parallelepipedi AG, AL, che hanno la medesima base e la medesima altezza, sono equivalenti fra loro.

PROPOSIZIONE XI.

497. Teorema. *Ogni parallelepipedo può esser cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente, che avrà la medesima altezza e una base equivalente.*

Sia AG (Fig. 210) il parallelepipedo proposto: dai punti A, B, C, D conducete AI, BK, CL, DM perpendicolari al piano della base; formerete così il parallelepipedo AL equivalente al parallelepipedo AG, le di cui facce laterali AK, BL ec. saranno rettangoli. Se dunque la base ABCD è un rettangolo, AL sarà il parallelepipedo rettangolo equivalente al parallelepipedo proposto AG. Ma, se ABCD (Fig. 211) non è un rettangolo, conducete AO e BN perpendicolari sopra CD, dipoi OQ ed NP perpendicolari sopra la base; avrete il solido ABNOIKPQ, che sarà un parallelepipedo rettangolo: infatti, per costruzione, la base ABNO e la sua opposta IKPQ sono rettangoli; le facce laterali sono pur tali, poichè le costole AI, OQ ec. son perpendicolari al piano della base: dunque il solido AP è un parallelepipedo rettangolo. Ma i due parallelepipedi AP, AL possono considerarsi come costrutti sulla medesima base ABKI e colla medesima altezza AO; dunque sono equivalenti; dunque il parallelepipedo AG, che era stato prima cangiato in un parallelepipedo equivalente AL, si trova di nuovo cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente AP, che ha la medesima altezza AI, e la di cui base ABNO è equivalente alla base ABCD.

PROPOSIZIONE XII.

498. Teorema. *Due parallelepipedi rettangoli* AG, AL (Fig. 212), *che hanno la medesima base* ABCD, *stanno fra loro come le loro altezze* AE, AI.

*Se le altezze AE, AI stanno tra loro come due numeri interi *m*, *n* in modo che abbiasi AE : AI : : *m* : *n*, dividendo AE in *m* parti eguali e dai punti di divisione *x*, *y*, *z* ec. conducendo dei piani paralleli alla base, il parallelepipedo AG verrà decomposto in *m* parallelepipedi eguali come aventi basi ed altezze eguali, ed il parallelepipedo AL conterrà *n* di questi parallelepipedi parziali. Dunque AG ed AL staranno tra loro come *m* sta ad *n*, vale a dire come le altezze.

Se poi le altezze AE, AI fossero incommensurabili si proverà col solito metodo (402) che anche in quest' ipotesi i due parallelepipedi stanno tra loro come le altezze.

PROPOSIZIONE XIII.

499. Teorema. *Due parallelepipedi rettangoli* AG, AK (Fig. 213) *che hanno la medesima altezza* AE, *stanno fra loro come le basi* ABCD, AMNO.

Avendo situati i due solidi uno accanto all'altro, come la Figura gli rappresenta, prolungate il piano ONKL finchè incontri il piano DCGH seguendo PQ; avrete un terzo parallelepipedo AQ, che si potrà paragonare a ciascuno dei parallelepipedi AG, AK. I due solidi AG, AQ, avendo la medesima base AEHD, stanno fra loro come le respettive altezze AB, AO; parimente i due solidi AQ, AK, avendo la medesima base AOLE, stanno fra loro come le loro altezze AD, AM. Perciò si avranno le due proporzioni

sol. AG : *sol.* AQ : : AB : AO

sol. AQ : *sol.* AK : : AD : AM.

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, ed omettendo nel resultato il moltiplicatore comune *sol.* AQ, si avrà

sol. AG : *sol.* AK : : AB$\times$AD : AO$\times$AM.

Ma AB$\times$AD rappresenta la base ABCD, e AO$\times$AM rappresenta la base AMNO; dunque due parallelepipedi rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le basi.

PROPOSIZIONE XIV.

500. Teorema. *Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle lor basi per le loro altezze o come i prodotti delle loro tre dimensioni.*

*Siano P, *p* i due parallelepipedi rettangoli, A, *a* le loro altezze, B, *b* le loro basi. Siano inoltre P' un terzo parallelepipedo che abbia la medesima altezza A del primo e la medesima base *b* del secondo. Confrontando i parallele-

pipedi P, P' avremo (499) P : P' : : B : b. Confrontando i due parallelepipedi P', p, avremo ancora (498) P' : p : : A : a. Moltiplicando ora le due proporzioni e quindi dividendo per il fattore comune P' i termini della prima ragione, risulta P : p : : A×B : a×b, come volevasi dimostrare.

Indicando con L, L' la lunghezza e la larghezza della base B, e con l, l' le dimensioni della base b, potremo porre L×L' in luogo di B, l×l' in luogo di b, e così la proporzione trovata si cangerà nell'altra P : p : : A×L×L' : a×l×l'. Dunque i due parallelepipedi stanno tra loro come i prodotti delle loro tre dimensioni.

Corollario. L'ultima proporzione dando luogo all'equazione $\frac{P}{p}=\frac{A}{a}\times\frac{L}{l}\times\frac{L'}{l'}$, ne segue che un parallelepipedo rettangolo ne contiene un altro un numero di volte eguale al prodotto dei tre numeri che risultano, portando sopra le dimensioni del primo parallelepipedo le dimensioni corrispondenti del secondo. Dunque per misurare un parallelepipedo rettangolo, basta trovare quante volte ognuna delle sue tre dimensioni contiene la dimensione corrispondente del parallelepipedo rettangolo preso per unità di misura, e quindi moltiplicare i tre numeri che ne risultano. Questo è ciò che si esprime dicendo; che il *volume* o la *solidità* di un parallelepipedo rettangolo è misurata dal prodotto delle sue tre dimensioni e scrivendo P=A×L×L'. Anzi, poichè L×L'=B, abbiamo P=A×B e perciò il volume di un parallelepipedo eguaglia ancora il prodotto della sua base moltiplicata per la sua altezza.

Scolio. Per unità di misura suol prendersi il parallelepipedo rettangolo che ha tutte e tre le sue dimensioni eguali all'unità lineare, cioè un cubo. Di qui è derivato l'uso di chiamare *cubatura* la misura dei solidi. Se dunque un dato parallelepipedo rettangolo abbia 6 metri di altezza, 2 di lunghezza e 3 di larghezza, la sua solidità sarà 6×2×3=36 metri cubici.

Rappresentando con L uno dei lati di un cubo qualunque C, avremo C=L×L×L, ossia C=L³. Dunque la solidità di un cubo è data dalla terza potenza di uno dei suoi lati. Di qui l'uso di chiamare cubi le terze potenze dei numeri.

PROPOSIZIONE XV.

501. Teorema. *La solidità d'un parallelepipedo ed in generale la solidità d'un prisma qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Poichè 1.° un parallelepipedo qualunque è equivalente a un parallelepipedo rettangolo della medesima altezza e di base equivalente (497). Ora la solidità di quest'ultimo è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque la solidità del primo è parimente eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

2.° Ogni prisma triangolare è la metà del parallelepipedo costrutto in modo che abbia la medesima altezza e una base doppia (494). Ora la solidità di quest'ultimo è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque

quella del prisma triangolare è eguale al prodotto della sua base, metà di quella del parallelipipedo, moltiplicata per la sua altezza.

3.° Un prisma qualunque può esser diviso in tanti prismi triangolari della medesima altezza quanti triangoli si posson formare nel poligono che gli serve di base. Ma la solidità d'ogni prisma triangolare è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; e poichè l'altezza è la medesima per tutti, ne segue che la somma di tutti i prismi parziali sarà eguale alla somma delle superficie di tutti i triangoli, che servon loro di basi, moltiplicata per l'altezza comune. Dunque la solidità d'un prisma poligono qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario. Se si paragonan due prismi che abbiano la medesima altezza, i prodotti delle basi per le altezze staranno come le basi; dunque *due prismi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi;* per una simil ragione *due prismi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.*

PROPOSIZIONE XVI.

502. Lemma. *Se una piramide* SABCDE (Fig. 214) *è tagliata da un piano* abd *parallelo alla sua base;* 1.° *i lati* SA, SB, SC *ec. e l'altezza* SO, *saranno tagliati proporzionalmente in* a, b, c *ec. ed* o; 2.° *la sezione* abcde *sarà un poligono simile alla base* ABCDE.

Poichè 1.° essendo paralleli i piani ABC, *abc*, le loro intersezioni AB, *ab*, con un terzo piano SAB saranno parallele; dunque i triangoli SAB, *sab* son simili, e si ha la proporzione SA : S*a* : : SB : S*b*; si avrebbe pure SB : S*b* : : SC : S*c*; e così di seguito. Dunque tutti i lati SA, SB, SC, ec. sono tagliati proporzionalmente in *a*, *b*, *c*, ec. L'altezza SO è tagliata nella proporzione medesima al punto o, perchè BO e *bo* son parallele, e però si ha SO : So : : SB : S*b*.

2.° Poichè *ab* è parallela ad AB, *bc* a BC, *cd* a CD ec., l'angolo *abc*=ABC, l'angolo *bcd*=BCD, e così di seguito. Di più, a cagione dei triangoli simili SAB, S*ab*, si ha AB : *ab* : : SB : S*b*; ed, a cagione dei triangoli simili SBC, S*bc*, si ha SB : S*b* : : BC : *bc*; dunque AB : *ab* : : BC : *bc*; avrebbesi pure BC : *bc* : : CD : *cd*, e così di seguito. Dunque i poligoni ABCDE, *abcde* hanno gli angoli respettivamente eguali e i lati omologhi proporzionali; dunque son simili.

Corollario. Siano SABCDE, SXYZ due piramidi il cui vertice è comune, e che hanno la medesima altezza, ovvero le cui basi son situate sopra un medesimo piano: se si tagliano queste piramidi con un medesimo piano parallelo al piano delle basi, e ne risultino le sezioni *abcde*, *xyz*, dico che *le sezioni* adcde, xyz *staranno fra loro come le basi* ABCDE, XYZ.

Poichè, essendo simili i poligoni ABCDE, *abcde*, le loro superficie stanno come i quadrati dei lati omologhi AB, *ab*; ma AB : *ab* : : SA : S*a*; dunque ABCDE : *abcde* : : $SA^2 : Sa^2$. Per la medesima ragione, XYZ : *xyz* : : $SX^2 : Sx^2$. Ma poichè *abcxyz* non è che un medesimo piano, si ha pure SA : S*a* : : SX : S*x*; dunque ABCDE : *abcde* : : XYZ : *xyz*; dunque le sezioni *abcde*, *xyz* stanno fra loro come le basi ABCDE, XYZ.

PROPOSIZIONE XVII.

503. Teorema. *Due piramidi triangolari che hanno basi equivalenti ed altezze eguali, sono equivalenti.*

Sieno (Fig. 215) SABC, *sabc* le due piramidi, le cui basi ABC, *abc*, che noi supponiamo poste sopra nn medesimo piano, sono equivalenti, e che hanno la medesima altezza TA; se queste piramidi non sono eqnivalenti, sia *sabc* la più piccola, e sia Ax l'altezza d'un prisma il quale essendo costrutto sulla base ABC, fosse egnale alla loro differenza.

Dividete l'altezza comnne AT in parti egnali minori di Ax, e sia k nna di qneste parti; pei punti di divisione dell'altezza, fate passare dei piani paralleli al piano delle basi; le sezioni fatte da ciascuno di questi piani nelle due piramidi saranno equivalenti (502) come DEF e *def*, GHI e *ghi* ec. Ciò posto, sui triangoli ABC, DEF, GHI ec., presi per basi, costruite de'prismi esterni che abbiano per costole le parti AD, DG, GK ec. del lato SA; parimente sui triangoli *def*, *ghi*, *klm* ec., presi per basi, costruite nella seconda piramide de'prismi interni le costole de'quali siano le parti corrispondenti del lato *sa*; tutti questi prismi parziali avranno k per altezza comune.

La somma de'prismi esterni della piramide SABC, è più grande di questa piramide; la somma de'prismi interni della piramide *sabc* è più piccola di questa piramide; dunque per queste due ragioni la differenza tra queste due somme di prismi dovrà esser maggiore della differenza tra le due piramidi.

Ora partendo dalle basi ABC, *abc*, il secondo prisma esterno DEFG è equivalente al primo prisma interno *defa*, poichè le loro basi DEF, *def* sono eqnivalenti ed hanno essi una medesima altezza k; sono per la medesima ragione equivalenti il terzo prisma esterno GHIK ed il secondo interno *ghid*, il quarto esterno ed il terzo interno, e così di seguito fino all'ultimo degli uni e degli altri. Dnnque tutti i prismi esterni della piramide SABC, ad eccezione del primo ABCD, hanno i loro equivalenti nei prismi interni della piramide *sabc*. Dunque il prisma ABCD è la differenza tra la somma de'prismi esterni della piramide SABC e la somma de'prismi interni della piramide *sabc*; ma la differenza tra queste due somme è maggiore della differenza tra le due piramidi; dunque bisognerebbe che il prisma ABCD fosse maggiore del prisma ABCx; ora al contrario esso è più piccolo, poichè questi prismi hanno una medesima base ABC e l'altezza k del primo è minore dell'altezza Ax del secondo. Dunqne l'ipotesi dalla quale siamo partiti non può aver luogo; dunque le due piramidi SABC, *sabc*, di basi eqnivalenti e di altezze eguali, sono equivalenti.

PROPOSIZIONE XVIII.

504. Teorema. *Qualunque piramide triangolare* (Fig. 216) *è il terzo del prisma triangolare della medesima base e della medesima altezza.*

Sia SABC una piramide triangolare, ABCDES un prisma triangolare della

medesima base e della medesima altezza, dico che la piramide è il terzo del prisma.

Togliete dal prisma la piramide SABC, resterà il solido SACDE il quale può considerarsi come una piramide quadrangolare di cui il vertice è S, e che ha per base il parallelogrammo ACDE, tirate la diagonale CE e conducete il piano SCE il quale dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SDCE. Queste due piramidi hanno per altezza comune la perpendicolare abbassata del vertice S sul piano ACDE: esse hanno delle basi eguali, poichè i triangoli ACE, DCE, sono le due metà del medesimo parallelogrammo; dunque le due piramidi SACE, SDCE sono equivalenti tra loro: ma la piramide SDCE e la piramide SABC hanno delle basi eguali ABC, DES: esse hanno pure la medesima altezza, perchè quest' altezza è la distanza dei piani paralleli ABC, DES. Dunque le due piramidi SABC, SDCE sono equivalenti: ma si è dimostrato che la piramide SDCE è equivalente alla piramide SACE, dunque le tre piramidi SABC, SDCE, SACE le quali compongono il prisma ABD sono equivalenti tra loro. Dunque la piramide SABC è il terzo del prisma ABD che ha la medesima base e la medesima altezza.

Corollario. La solidità d'una piramide triangolare è eguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

PROPOSIZIONE XIX.

505. Teorema. *Ogni piramide* SABCDE (Fig. 214) *ha per misura il terzo del prodotto della sua base* ABCDE *per la sua altezza* SO.

Poichè, facendo passare i piani SEB, SEC per le diagonali EB, EC si dividerà la piramide poligona SABCDE in più piramidi triangolari, che avranno tutte la medesima altezza SO. Ma pel Teorema precedente, ognuna di queste piramidi si misura moltiplicando ciascuna delle basi ABE, ACE, CDE pel terzo della sua altezza SO; dunque la somma delle piramidi triangolari, o la piramide poligona SABCDE, avrà per misura la somma dei triangoli ABE, BCE, DCE, o il poligono ABCDE, moltiplicato per $\frac{1}{3}$ SO; dunque ogni piramide ha per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. Ogni piramide è la terza parte del prisma della medesima base e della medesima altezza.

II. Due piramidi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi e due piramidi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

Scolio. Si può valutare la solidità d'ogni corpo poliedro decomponendolo in piramidi, e questa decomposizione si può fare in più maniere: una delle più semplici è di far passare i piani di divisione pel vertice d'un istess' angolo solido; allora si avranno tante piramidi parziali quante facce sono nel poliedro, eccetto quelle che forman l'angolo solido d'onde partono i piani di divisione.

PROPOSIZIONE XX.

506. Teorema. *Due poliedri simmetrici* (Fig. 202) *sono equivalenti tra loro, ovvero eguali in solidità.*

Poichè 1.° due piramidi triangolari simmetriche, tali come SABC, TABC, hanno per misura comune il prodotto della base ABC pel terzo dell'altezza SO, ovvero TO; dunque queste piramidi sono equivalenti tra loro.

2.° Se si divide in una maniera qualunque uno dei poliedri simmetrici in piramidi triangolari, si potrà dividere parimente l'altro poliedro in piramidi triangolari simmetriche: ora le piramidi triangolari simmetriche son respettivamente equivalenti; dunque i poliedri interi saranno equivalenti tra loro ed eguali in solidità.

PROPOSIZIONE XXI.

507. Teorema. *Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base, il tronco che resta togliendo la piccola piramide, è eguale alla somma di tre piramidi che avessero per altezza comune l'altezza del tronco, e le cui basi fossero la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.*

Sia SABCDE (Fig. 217) una piramide tagliata dal piano *abd* parallelo alla base; sia TFGH una piramide triangolare di cui la base e l'altezza siano eguali od equivalenti a quelle della piramide SABCDE. Si possono supporre le due basi situate sopra un medesimo piano, ed allora il piano *abd* prolungato determinerà nella piramide triangolare una sezione *fgh* situata alla medesima altezza al di sopra del piano comune delle basi; dal che resulta che la sezione *fgh* sta alla sezione *abd* come la base FGH sta alla base ABD (502); e, poichè le basi sono equivalenti, le sezioni lo saran pure. Le piramidi S*abcde*, T*fgh* sono dunque equivalenti, giacchè hanno la medesima altezza e basi equivalenti. Le piramidi intere SABCDE, TFGH sono equivalenti per la medesima ragione; dunque i tronchi ABD*dab*, FGH*hfg* sono equivalenti; e per conseguenza basterà dimostrare la Proposizione enunciata pel solo caso del tronco di piramide triangolare.

Sia FGH*hfg* (Fig. 218) un tronco di piramide triangolare a basi parallele: per i tre punti F, *g*, H conducete il piano F*g*H, che toglierà dal tronco la piramide triangolare *g*FGH. Questa piramide ha per base la base inferiore FGH del tronco; ha pure per altezza l'altezza del tronco, poichè il vertice *g* è nel piano della base superiore *fgh*.

Dopo aver tolto questa piramide resterà la piramide quadrangolare *gfh*HF, il cui vertice è *g* e la base *fh*HF. Per i tre punti *f*, *g*, H conducete il piano *fg*H che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari *g*F*f*H, *gfh*H. Quest'ultima ha per base la base superiore *fgh* del tronco e per altezza l'altezza del tronco, poichè il suo vertice H appartiene

alla base inferiore; così abbiamo già due delle tre piramidi che debbon comporre il tronco.

Resta a considerare la terza *gFfH*; ora, se si conduca *g*K parallela a *f*F e si immagini una nuova piramide *f*FHK il cui vertice è K e la base F*f*H, queste due piramidi avranno la medesima base F*f*H; esse avranno pure la medesima altezza, poichè i vertici *g* K son situati sopra una linea *g*K parallela ad F*f* e per conseguenza parallela al pian della base; dunque queste piramidi sono equivalenti. Ma la piramide *f*FKH può esser considerata come se avesse il suo vertice in *f* e così ella avrà la medesima altezza del tronco; quanto poi alla sua base FKH, dico che è media proporzionale fra le basi FGH, *fgh*. Infatti i triangoli FHK, *fgh* hanno un angolo eguale F=*f*, ed un lato eguale FK=*fg*; si ha dunque (422) FHK : *fgh* : : FH : *fh*. Si ha pure FGH : FHK : : FG : FK o *fg*. Ma i triangoli simili FGH, *fgh* danno FG : *fg* : : FH : *fh*: dunque FGH : FHK : : FHK : *fgh*, e così la base FHK è media proporzionale fra le due basi FGH, *fgh*. Dunque un tronco di piramide triangolare a basi parallele equivale a tre piramidi che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e le cui basi sono la base inferiore del tronco, la sua base superiore, ed una media proporzionale fra queste due basi.

PROPOSIZIONE XXII.

508. Teorema. *Se si taglia un prisma triangolare* (Fig. 216), *di cui* ABC *è la base, con un piano* DES *inclinato a questa base; il solido* ABCDES *che resulta da questa sezione, sarà eguale alla somma di tre piramidi i vertici delle quali sono* D, E, S *e la base comune* ABC.

Per i tre punti S, A, C fate passare il piano FAS, che toglierà dal prisma troncato ABCDES la piramide triangolare SABC: questa piramide ha per base ABC e per vertice il punto S.

Dopo aver tolta questa piramide, resterà la piramide quadrangolare SACDE, di cui S è il vertice ed ACDE la base. Per i tre punti S, E, C conducete parimente un piano SEC, che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SDCE.

La piramide SAEC, che ha per base il triangolo AEC e per vertice il punto F, è equivalente ad una piramide EABC, che avesse per base AEC e per vertice il punto B. Imperocchè queste due piramidi hanno la medesima base; esse hanno ancora la medesima altezza, poichè la linea BS, essendo parallela a ciascuna delle linee AE, CD, è parallela al loro piano ACE; dunque la piramide SAEC è equivalente alla piramide EABC la quale può esser considerata come se avesse per base ABC e per vertice il punto E.

La terza piramide SCDE può esser cangiata primieramente in ASCD, poichè queste due piramidi hanno la medesima base SCD, ed hanno ancora la medesima altezza, perchè AE è parallela al piano SCD; dunque la piramide SCDE è equivalente ad ASCD. In seguito la piramide ASCD può

esser cambiata in ABCD, perchè queste due piramidi hanno la base comune ACD: esse hanno ancora la medesima altezza, poichè i loro vertici S e B son situati sopra una parallela al piano della base. Dunque la piramide SCDE, equivalente ad ASCD, è ancora equivalente ad ABCD: ora questa piramide può essere riguardata come se avesse per base ABC, e per vertice il punto D.

Dunque finalmente il prisma troncato ABCDES è eguale alla somma di tre piramidi che hanno per base comune ABC, e i di cui vertici son respettivamente i punti D, E, S.

Corollario. Se le costole AE, BS, CD son perpendicolari al piano della base, esse saranno nel medesimo tempo le altezze delle tre piramidi che compongono insieme il prisma troncato; di modo che la solidità del prisma troncato sarà allora espressa per $^1/_3$ABC$\times$AE$+^1/_3$ABC$\times$BS$+^1/_3$ABC$\times$CD; quantità, che riducesi a $^1/_3$ABC$\times$(AE+BS+CD).

PROPOSIZIONE XXIII.

509. Teorema. *Due piramidi triangolari simili* (Fig. 203) *hanno le facce omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi eguali.*

Secondo la Definizione, le due piramidi triangolari SABC, TDEF sono simili se i due triangoli SAB, ABC son simili ai due TDE, DEF e similmente disposti, cioè, se si ha l'angolo ABS=DET, BAS=EDT, ABC=DEF, BAC=EDF, e se inoltre l'inclinazione dei piani SAB, ABC è eguale a quella dei piani TDE, DEF: posto ciò, dico che queste piramidi hanno tutte le facce respettivamente simili, e gli angoli solidi omologhi eguali.

Prendete BG=ED, BH=EF, BI=ET, e tirate GH, GI, IH. La piramide TDEF è eguale alla piramide IGBH; poichè, avendo preso i lati GB, BH eguali ai lati DE, EF, e l'angolo GBH essendo per supposizione eguale all'angolo DEF, il triangolo GBH è eguale a DEF; dunque, per effettuar la soprapposizione delle due piramidi, si può primieramente situare la base DEF sulla sua eguale GBH; dipoi, giacchè il piano DTE è tanto inclinato sopra DEF quanto il piano SAB sopra ABC, è chiaro che il piano DET cadrà indefinitamente sopra il piano ABS. Ma, per supposizione, l'angolo DET=GBI; dunque ET cadrà sul suo eguale BI; e poichè i quattro angoli D, E, F, T, coincidono con i quattro G, B, H, I, ne segue (487) che la piramide TDEF concide colla piramide IGBH.

Ora, a cagione dei triangoli eguali DEF, GBH, si ha l'angolo BGH=DEF=BAC; dunque GH è parallelo ad AC. Per una ragione simile GI è parallelo ad AS; dunque il piano IGH è parallelo ad SAC (473). Da ciò segue che il triangolo IGH o il suo eguale TDF è simile ad SAC (501), e che il triangolo IBH o il suo eguale TEF è simile a SBC; dunque le due piramidi triangolari simili SABC, TDEF hanno le quattro facce respettivamente simili: di più hanno gli angoli solidi omologhi eguali.

Imperocchè si è di già situato l'angolo solido E sul suo omologo B, e si

potrebbe fare lo stesso per due altri angoli solidi omologhi; ma si vede immediatamente che due angoli solidi omologhi sono eguali, per esempio gli angoli T e S, poichè son formati da tre angoli piani respettivamente eguali e similmente disposti.

Dunque due piramidi triangolari simili hanno le facce omologhe simili e gli angoli solidi omologhi eguali.

Corollario I. I triangoli simili nelle due piramidi danno le proporzioni AB : DE : : BC : EF : : AC : DF : : AS : DT : : SB : TE : : SC : TF; dunque *nelle piramidi triangolari simili i lati omologhi sono proporzionali.*

II. E poichè gli angoli solidi omologhi sono eguali, ne segue che *l'inclinazione di due facce qualunque d'una piramide è eguale all'inclinazione delle facce omologhe della piramide simile.*

III. Se si taglia la piramide triangolare SABC con un piano GHI parallelo ad una delle facce SAC, la piramide parziale BGHI sarà simile alla piramide intera BASC: poichè i triangoli BGI, BGH son respettivamente simili ai triangoli BAS, BAC e similmente disposti; l'inclinazione dei loro piani è la medesima da ambe le parti; dunque le due piramidi sono simili.

IV. In generale, *se si taglia una piramide qualunque* SABCDE (Fig. 214) *con un piano* abcde *parallelo alla base, la piramide parziale* Sabcde *sarà simile alla piramide intera* SABCDE. Poichè le basi ABCDE, *abcde* son simili e tirando AC, *ac*, si è adesso provato che la piramide triangolare SABC è simile alla piramide *Sabc*; dunque il punto S è determinato per rapporto alla base ABC, come il punto S per rapporto alla base *abc* (486. XVIII); dunque le due piramidi SABCDE, *Sabcde* sono simili.

Scolio. In vece dei cinque dati richiesti dalla Definizione perchè due piramidi triangolari sian simili, si potrebbe sostituirne altri cinque secondo differenti combinazioni, e ne risulterebbero altrettanti Teoremi fra' quali si può distinguere questo: *Due piramidi triangolari son simili quando hanno i lati omologhi proporzionali.*

Poichè, se si hanno le proporzioni AB : DE : : BC : EF : : AC : DF : : AS : DT : : SB : TE : : SC : TF, il che comprende cinque condizioni, i triangoli ABS, ABC saranno simili ai triangoli DET, DEF, e similmente disposti. Si avrà pure il triangolo SBC simile a TEF; dunque i tre angoli piani che formano l'angolo solido B, saranno eguali respettivamente agli angoli piani che forman l'angolo solido E; donde ne segue che l'inclinazione dei piani SAB, ABC è eguale a quella dei loro omologhi TDE, DEF, e che perciò le due piramidi sono simili.

PROPOSIZIONE XXIV.

510. Teorema. *Due poliedri simili hanno le facce omologhe simili e gli angoli solidi omologhi eguali.*

Sia ABCDE (Fig. 219) la base d'un poliedro; siano M ed N i vertici di due angoli solidi fuori di questa base, determinati dalle piramidi triangolari

MABC, NABC la cui base comune è ABC; siano nell'altro poliedro *abcde* la base omologa o simile ad ABCDE, *m* ed *n* i vertici omologhi a M ed N, determinati dalle piramidi *mabc*, *nabc* simili alle piramidi MABC, NABC; dico primieramente che le distanze MN, *mn* sono proporzionali ai lati omologhi AB, *ab*.

Infatti, essendo simili le piramidi MABC, *mabc*, l'inclinazione dei piani MAC, BAC è eguale a quella dei piani *mac*, *bac*; parimente, essendo simili le piramidi NABC, *nabc*, l'inclinazione dei piani NAC, BAC è eguale a quella dei piani *nac*, *bac*; dunque, se si tolgano le prime inclinazioni dall'ultime, resterà l'inclinazione dei piani NAC, MAC eguale a quella dei piani *nac*, *mac*. Ma, a motivo della similitudine delle stesse piramidi, il triangolo MAC è simile a *mac*, ed il triangolo NAC è simile a *nac*; dunque le due piramidi triangolari MNAC, *mnac*, hanno due facce respettivamente simili, similmente disposte ed egualmente inclinate fra loro; dunque queste piramidi sono simili (509), e i loro lati omologhi danno la proporzione MN : *mn* :: AM : *am*. D'altronde AM : *am* :: AB : *ab*; dunque MN : *mn* :: AB : *ab*.

Siano P e *p* due altri vertici omologhi dei medesimi poliedri; si avrà similmente PN : *pn* :: AB : *ab*, PM : *pm* :: AB : *ab*; dunque MN : *mn* :: PN : *pn* :: PM : *pm*. Dunque *il triangolo* PNM *che unisce tre vertici qualunque d'un poliedro, è simile al triangolo* pnm *che unisce i tre vertici omologhi dell'altro poliedro*.

Siano inoltre Q e *q* due vertici omologhi; il triangolo PQN sarà simile a *pqn*. Dico di più che l'inclinazione dei piani PQN, PMN è eguale a quella dei piani *pqn*, *pmn*.

Poichè, se si tirino QM e *qm*, si avrà sempre il triangolo QNM simile a *qnm* e per conseguenza l'angolo QNM eguale a *qnm*. Concepite in N un angolo solido formato dai tre angoli piani QNM, QNP, PNM, ed in *n* un altr'angolo solido formato dai tre angoli piani *qnm*, *qnp*, *pnm*: poichè questi angoli piani sono respettivamente eguali, ne segue che gli angoli solidi sono eguali. Dunque l'inclinazione dei due piani PNQ, PNM è eguale a quella dei loro omologhi *pnq*, *pnm*; dunque, se i due triangoli PNQ, PNM fossero in un medesimo piano, nel qual caso si avrebbe l'angolo QNM=QNP+PNM, si avrebbe pure l'angolo *qnm*=*qnp*+*pnm*, ed i due triangoli *qnp*, *pnm* sarebbero pure in un medesimo piano.

Tutto ciò che abbiamo dimostrato ha luogo qualunque siano gli angoli M, N, P, Q paragonati ai loro omologhi *m*, *n*, *p*, *q*.

Supponiamo adesso che la superficie d'uno dei poliedri sia divisa in triangoli ABC, ACD, MNP, NPQ ec.; si vede che la superficie dell'altro poliedro conterrà un egual numero di triangoli *abc*, *acd*, *mnp*, *npq*, ec. simili e similmente disposti; e se più triangoli, come MPN, NPQ ec., appartengono ad una medesima faccia e sono in un medesimo piano, i loro omologhi *mnp*, *npq* ec. saranno parimente in un medesimo piano. Dunque ogni faccia poligona in un poliedro corrisponderà ad una faccia poligona simile nell'altro poliedro; dunque i due poliedri saranno compresi da un medesimo numero di

piani simili e similmente disposti. Dico di più che gli angoli solidi omologhi saranno eguali.

Poichè, se l'angolo solido N, per esempio, è formato dagli angoli piani QNP, PNM, MNR, QNR, l'angolo solido omologo *n* sarà formato dagli angoli piani *qnp*, *pnm*, *mnr*, *qnr*. Ora questi angoli piani son respettivamente eguali e l'inclinazione di due piani adiacenti è eguale a quella dei loro omologhi; dunque i due angoli solidi sono eguali, giacchè posson essere soprapposti.

Dunque finalmente due poliedri simili hanno le facce omologhe simili e gli angoli solidi omologhi eguali.

Corollario. Segue dalla dimostrazione precedente che se con quattro vertici d'un poliedro si formi una piramide triangolare e si formi pure un'altra piramide con i quattro vertici omologhi d'un poliedro simile, queste due piramidi saranno simili, perchè avranno i lati omologhi proporzionali (509).

Si vede nel tempo stesso che due diagonali omologhe, per esempio AN, *an*, stanno fra loro come due lati omologhi AB, *ab*.

PROPOSIZIONE XXV.

511. Teorema. *Due poliedri simili posson dividersi in un medesimo numero di piramidi triangolari simili respettivamente disposte.*

Poichè si è già veduto che le superficie di due poliedri si posson dividere in un medesimo numero di triangoli simili respettivamente e similmente disposti. Considerate tutti i triangoli d'un poliedro, fuorchè quelli che formano l'angolo solido A, come basi di altrettante piramidi triangolari il cui vertice è in A; queste piramidi prese insieme compongono il poliedro: dividete parimente l'altro poliedro in piramidi che abbian per vertice comune quello dell'angolo *a* omologo ad A; è chiaro che la piramide la quale congiunge quattro vertici d'un poliedro, sarà simile alla piramide che congiunge i quattro vertici omologhi dell'altro poliedro. Dunque due poliedri simili ec.

PROPOSIZIONE XXVI.

512. Teorema. *Due piramidi simili* (Fig. 214) *stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.*

Poichè, essendo simili due piramidi, la minore potrà esser situata sulla maggiore in maniera che abbiano l'angolo solido S comune. Allora le basi ABCDE, *abcde* saranno parallele; poichè, siccome le facce omologhe sono simili (509), l'angolo *Sab* è eguale a SAB, come pure *Sbc* a SBC; dunque il piano *abc* è parallelo al piano ABC. Posto ciò, sia SO la perpendicolare abbassata dal vertice S sul piano ABC e sia *o* il punto ove questa perpendicolare incontra il piano *abc*; si avrà, secondo quello che già fu dimostrato (502), SO : *So* : : SA : *Sa* : : AB : *ab* e per conseguenza

$$\tfrac{1}{3}SO : \tfrac{1}{3}So : : AB : ab.$$

Ma, essendo le basi ABCDE, *abcde* Figure simili si ha

$$ABCDE : abcde :: AB^2 : ab^2.$$

Moltiplicando queste due proporzioni termine per termine, ne risulterà la proporzione

$$ABCDE \times {}^1/_3 SO : abcde \times {}^1/_3 So :: AB^3 : ab^3;$$

ora ABCDE $\times$ $^1/_3$SO è la solidità della piramide SABCDE e *abcde* $\times$ $^1/_3$SO e quella della piramide *Sabcde*; dunque due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei loro lati omologhi.

PROPOSIZIONE XXVII.

513. Teorema. *Due poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.*

Imperocchè due poliedri simili (Fig. 219) posson esser divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari respettivamente simili (511). Ora le due piramidi simili APNM, *apnm* stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi AM, *am*, come i cubi dei lati omologhi AB, *ab*. Lo stesso rapporto ha luogo fra due altre piramidi omologhe qualunque; dunque la somma di tutte le piramidi che compongono un poliedro, ossia il poliedro stesso sta all'altro poliedro, come il cubo d'un lato qualunque del primo sta al cubo del lato omologo del secondo.

Scolio generale.

514. Possiamo or presentare in termini algebrici, cioè nella maniera più succinta, la ricapitolazione delle principali Proposizioni di questo Libro concernenti le solidità dei poliedri.

Sia B la base d'un prisma, A la sua altezza; la solidità del prisma sarà $B \times A$ o BA.

Sia B la base d'una piramide, A la sua altezza; la solidità della piramide sarà $B \times {}^1/_3 A$ o $A \times {}^1/_3 B$ o $^1/_3 BA$.

Sia A l'altezza d'un tronco di piramide a basi parallele; siano B e B' le sua basi; $\sqrt{BB'}$ sarà la media proporzionale geometrica fra queste; e la solidità del tronco sarà $^1/_3 A \times (B + B' + \sqrt{BB'})$.

Sia B la base d'un tronco di prisma triangolare, A, A', A'' siano le altezze de'suoi tre vertici superiori rispetto alla base; la solidità del prisma troncato sarà $^1/_3 B \times (A + A' + A'')$.

Sian finalmente P e *p* le solidità di due poliedri simili; A ed *a* due lati o due diagonali omologhe di questi poliedri; si avrà $P : p :: A^3 : a^3$.

LIBRO SETTIMO.

I TRIANGOLI E I POLIGONI SFERICI.

515. Definizioni. i. La *sfera* è un solido terminato da una superficie curva di cui tutti i punti sono egualmente distanti da un punto interno che si chiama *centro*.

Si può immaginare che la sfera sia prodotta dalla rivoluzione del mezzo-circolo DAE (Fig. 220) intorno al diametro DE; poichè la superficie descritta con tal movimento dalla curva DAE avrà tutti i suoi punti a distanze eguali dal centro C.

ii. Il *raggio della sfera* è una linea retta condotta dal centro a un punto della sua superficie; il *diametro* o *asse* è una linea che passa pel centro e termina da ambe le parti alla superficie. Tutti i raggi della sfera sono eguali; tutti i diametri sono eguali e doppj del raggio.

iii. Si dimostrerà (516) che ogni sezione della sfera fatta da un piano è un circolo: posto ciò, si chiama *gran circolo* la sezione che passa pel centro, *piccolo circolo* quella che non vi passa.

iv. Un *piano* è *tangente* della sfera quando non ha che un solo punto comune colla superficie della sfera medesima.

v. *Il polo d' un circolo* della sfera è un punto della sua superficie egualmente lontano da tutti i punti della circonferenza di questo circolo. Si farà vedere (521) che ogni circolo grande o piccolo ha sempre due poli.

vi. *Triangolo sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da tre archi di circoli grandi. Questi archi, che si chiamano i *lati* del triangolo, vengon sempre supposti minori della mezza-circonferenza. Gli angoli che i loro piani fanno tra loro, sono gli angoli del triangolo.

vii. *Un triangolo sferico* prende il nome di *rettangolo*, *isoscele*, *equilatero* nei casi stessi d'un triangolo rettilineo.

viii. *Poligono sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da più archi di circoli grandi.

ix. *Fuso* è la parte della superficie della sfera compresa fra due grandi mezzi-circoli che terminano a un diametro comune.

x. Chiamerò *cuneo* o *unghia sferica* la parte del solido della sfera compresa fra i medesimi grandi mezzi circoli ed alla quale il fuso serve di base.

xi. *Piramide sferica* è la parte del solido della sfera compresa fra i piani d'un angolo solido il cui vertice è al centro. La *base* della piramide è il poligono sferico intercetto tra i medesimi piani.

xii. Si chiama *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due

piani paralleli che ne sono le *basi*. Uno di questi piani può esser tangente della sfera; allora la zona non ha che una base.

XIII. *Segmento sferico* è la porzione del solido della sfera compresa fra due piani paralleli che ne sono le basi. Uno di questi piani può esser tangente della sfera; allora il segmento sferico non ha che una base.

XIV. L'*altezza d'una zona* o *d'un segmento* è la distanza dei due piani paralleli che son le basi della zona o del segmento predetto.

XV. Mentre il mezzo-circolo DAE (Fig. 220) girando intorno al diametro DE descrive la sfera, ogni settore circolare, come DCF o FCH, descrive un solido che si chiama *settore sferico*.

PROPOSIZIONE I.

516. Teorema. *Qualunque sezione della sfera, fatta per mezzo d'un piano, è un circolo.*

Sia AMB (Fig. 221) la sezione fatta da un piano nella sfera il cui centro è C. Dal punto C conducete la perpendicolare CO sul piano AMB e diverse rette CM, CM, CB a differenti punti della curva AMB che termina la sezione.

Le oblique CM, CM, CB, sono eguali, poichè son raggi della sfera; esse son dunque egualmente lontane dalla perpendicolare CO; dunque tutte le linee OM, OM, OB sono eguali; dunque la sezione AMB è un circolo ed O n'è il centro.

Corollario I. Se la sezione passa pel centro della sfera, il suo raggio sarà il raggio della sfera; dunque tutti i circoli grandi sono eguali fra loro.

II. Due circoli grandi si tagliano sempre in due parti eguali; poichè la loro comune intersezione, passando pel centro, è un diametro.

III. Ogni gran circolo divide la sfera e la sua superficie in due parti eguali: poichè se, dopo aver separati i due emisferi, si applicano sulla base comune rivolgendo la loro convessità dal medesimo lato, le due superficie coincideranno l'una coll'altra, senza di che vi sarebber dei punti più vicini al centro gli uni degli altri.

IV. Il centro d'un piccolo circolo e quello della sfera sono sopra la medesima retta perpendicolare al piano del circolo piccolo.

V. I circoli piccoli sono tanto più piccoli quanto sono più lontani dal centro della sfera; poichè, quanto è più grande la distanza CO, tanto è più piccola la corda AB, diametro del piccol circolo AMB.

VI. Per due punti dati sulla superficie d'una sfera si può far passare un arco di circolo grande; poichè i due punti dati e il centro della sfera sono tre punti che determinano la posizione d'un piano. Frattanto, se i due punti dati fossero alle estremità d'un diametro, allora questi due punti ed il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbe un'infinità di circoli grandi che potrebber passare pei due punti dati.

PROPOSIZIONE II.

517. Teorema. *In ogni triangolo sferico* ABC (Fig. 222) *un lato qualunque è minore della somma degli altri due.*

Sia O centro della sfera, e siano condotti i raggi OA, OB, OC. Se s'immaginano i piani AOB, AOC, COB, questi piani formeranno al punto O un angolo solido, e gli angoli AOB, AOC, COB avranno per misura respettiva i lati AB, AC, BC del triangolo sferico ABC. Ora ciascuno dei tre angoli piani che compongono l'angolo solido, è minore della somma degli altri due; dunque un lato qualunque del triangolo ABC è minor della somma degli altri due.

PROPOSIZIONE III.

518. Teorema. *Il più corto viaggio da un punto ad un altro sulla superficie della sfera è l'arco di circolo grande che unisce i due punti dati.*

Sia ANB (Fig. 223) l'arco di circolo grande che unisce i punti A e B; e sia fuori di quest'arco, se è possibile, M un punto della linea la più corta fra A e B. Pel punto M conducete gli archi di circolo grande MA, MB, e prendete $BN=MB$.

Pel Teorema precedente, l'arco ANB è più corto di $AM+MB$; togliendo da ambedue le parti $BN=BM$, resterà $AN<AM$. Ora la distanza da B a M, ossia ch'essa si confonda coll'arco BM, o ch'ella sia qualunque altra linea, è eguale alla distauza da B a N; poichè, facendo girare il piano del circolo grande BM intorno al diametro che passa per B, si può condurre il punto M sul punto N, e allora la linea più corta da M a B, qualunque ella sia, si confonderà con quella da N a B; dunque i due viaggi da A a B, l'uno che passa per M, l'altro per N, hanno una parte eguale da M a B e da N a B. Il primo viaggio, per supposizione, è il più corto: dunque la distanza da A a M è più corta della distanza da A a N; il che sarebbe assurdo, poichè l'arco AM è maggiore di AN: dunque verun punto della linea la più corta fra A e B può essere fuori dell'arco ANB: dunque quest' arco stesso è la linea più corta fra le sue estremità.

PROPOSIZIONE IV.

519. Teorema. *La somma dei tre lati d'un triangolo sferico è minore della circonferenza d'un circolo grande.*

Sia ABC (Fig. 224) un triangolo sferico qualunque; prolungate i lati AB, AC finchè s'incontrino di nuovo in D. Gli archi ABD, ACD saranno mezze-circonferenze, poichè due circoli grandi si tagliano sempre in due parti eguali (516): ma nel triangolo BCD il lato $BC<BD+CD$; aggiungendo da ambedue le parti $AB+AC$, si avrà $AB+AC+BC<ABD+ACD$, cioè minore d'una intera circonferenza.

PROPOSIZIONE V.

520. Teorema. *La somma dei lati d'ogni poligono sferico è minore della circonferenza d'un circolo grande.*

Sia, per esempio, il pentagono ABCDE (Fig. 225); prolungate i lati AB, DC finchè s'incontrino in F: poichè BC è minore BF+CF, il contorno del pentagono ABCDE è minore di quello del quadrilatero AEDF. Prolungate nuovamente i lati AE, FD fino al loro incontro in G; si avrà ED<EG+GD; dunque il contorno del quadrilatero AEDF è minore di quello del triangolo AFG; questo è minore della circonferenza d'un circolo grande: dunque a più forte ragione il contorno del poligono ABCDE è minore della medesima circonferenza.

PROPOSIZIONE VI.

521. Teorema. *Se si conduce il diametro* DE (Fig. 220) *perpendicolare al piano del circolo grande* AMB, *le estremità* D *ed* E *di questo diametro saranno i poli del circolo* AMB *e di tutti i piccoli circoli, come* FNG, *che gli son paralleli.*

Poichè DC, essendo perpendicolare al piano AMB, è perpendicolare a tutte le rette CA, CM, CB ec. condotte dal suo piede in questo piano; dunque tutti gli archi DA, DM, DB ec. sono quarte parti di circonferenza, e perciò eguali; lo stesso è degli archi EA, EM, EB ec.; dunque i punti D ed E sono ciascuno egualmente lontani da tutti i punti della circonferenza AMB; dunque essi sono i poli di questa circonferenza (515 v.).

In secondo luogo il raggio DC, perpendicolare al piano AMB, è perpendicolare al suo parallelo FNG; dunque passa pel centro O del circolo FNG (516); dunque, se si tirin le oblique DF, DN, DG, queste oblique si allontaneranno egualmente dalla perpendicolare DO, e saranno eguali. Ma, essendo eguali le corde, sono eguali gli archi corrispondenti; dunque tutti gli archi DF, DN, DG ec. sono fra loro eguali; dunque il punto D è il polo del circolo piccolo FNG, e per la medesima ragione il punto E è l'altro polo.

Corollario I. Ogni arco DM condotto da un punto dell'arco di circolo grande AMB al suo polo è un quarto di circonferenza che noi per abbreviare chiameremo *quadrante*; e questo quadrante fa nel medesimo tempo un angolo retto coll'arco AM. Poichè, essendo la linea DC perpendicolare al piano AMC, ogni piano DMC che passa per la linea DC è perpendicolare al piano AMC; dunque l'angolo di questi piani o, seguendo la Definizione vi, l'angolo AMD è un angolo retto.

II. Per trovare il polo d'un arco dato AM, conducete l'arco indefinito MD perpendicolare ad AM; prendete MD eguale a un quadrante, ed il punto D sarà uno dei poli dell'arco AM; ovvero conducete per due punti A e M gli archi AD ed MD perpendicolari ad AM, il punto d'incontro D di questi due archi sarà il polo richiesto.

III. Reciprocamente, se la distanza del punto D da ciascuno dei punti A ed M è eguale a un quadrante, dico che il punto D sarà il polo dell'arco AM e che nel medesimo tempo gli angoli DAM, AMD saranno retti.

Poichè sia C il centro della sfera e siano condotti i raggi CA, CD, CM: a causa che gli angoli ACD, MCD sono retti, la linea CD è perpendicolare alle due rette CA, CM; dunque è perpendicolare al loro piano; dunque il punto D è il polo dell'arco AM; ed in conseguenza gli angoli DAM, AMD sono retti.

Scolio. Le proprietà dei poli permettono di segnare sulla superficie della sfera archi di circolo colla medesima facilità come sopra una superficie piana. Si vede, per esempio, che facendo girare l'arco DF, o qualunque altra linea dello stesso intervallo, intorno al punto D, l'estremità F descriverà il piccolo circolo FNG; e, se si fa girare il quadrante DFA intorno al punto D, l'estremità A descriverà l'arco di circolo grande AM.

Se bisogni prolungare l'arco AM, o se non siano dati che i soli punti A ed M per cui deve passare quest'arco, si determinerà prima il polo D mediante l'intersezione di due archi descritti dai punti A ed M, come centri, con un intervallo eguale al quadrante. Essendo trovato il polo D, si descriverà dal punto D, come centro e col medesimo intervallo l'arco AM ed il suo prolungamento.

Finalmente, se da un punto dato P si deve abbassare un arco perpendicolare sull'arco dato AM, si prolungherà quest'arco in S fino a che l'intervallo PS sia eguale a un quadrante; in seguito dal polo S e col medesimo intervallo si descriverà l'arco PM, che sarà l'arco perpendicolare richiesto.

PROPOSIZIONE VII.

522. Teorema. *Ogni piano perpendicolare all'estremità d'un raggio è tangente della sfera.*

Sia FAG (Fig. 226) un piano perpendicolare all'estremità del raggio OA; se si prende un punto qualunque M su questo piano e si tirano OM ed AM, l'angolo OAM sarà retto e però la distanza OM sarà maggiore di OA. Il punto M è dunque fuor della sfera; e siccome è lo stesso per ogni altro punto del piano FAG, ne segue che questo piano non ha che il solo punto A comune colla superficie della sfera; dunque egli è tangente di questa superficie.

Scolio. Si può dimostrar parimente che due sfere non hanno che un solo punto comune e sono per conseguenza tangenti l'una dell'altra, quando la distanza dei loro centri è eguale alla somma o alla differenza dei loro raggi: allora i centri ed il punto di contatto sono in linea retta.

PROPOSIZIONE VIII.

523. Teorema. *L'angolo* BAC (Fig. 226), *che fanno tra loro due archi di circoli grandi* AB, AC *è eguale all'angolo* FAG *formato dalle tangenti di que-*

sti archi al punto A; *esso ha per misura l'arco* DE *descritto dal punto* A *come polo fra i lati* AB, AC, *prolungati se sia necessario.*

Poichè la tangente AF condotta nel piano dell'arco AB è perpendicolare al raggio AO; la tangente AG condotta nel piano dell'arco AC è perpendicolare al medesimo raggio AO; dunque l'angolo FAG è eguale all'angolo dei piani OAB, OAC (477) ch'è quello degli archi AB, AC e che s'indica con BAC.

Parimente, se l'arco AD è eguale a un quadrante, come pure AE, le linee OD, OE saranno perpendicolari ad AO, e l'angolo DOE sarà pure eguale all'angolo dei piani AOD, AOE; dunque l'arco DE è la misura dell'angolo di questi piani, ossia la misura dell'angolo BAC.

Corollario. Gli angoli dei triangoli sferici possono paragonarsi fra loro per mezzo degli archi di circoli grandi descritti dai loro vertici come poli e compresi fra i loro lati. Laonde è facile fare un angolo sferico eguale ad un angolo dato.

Scolio. Gli angoli opposti al vertice, tali come ACO e BCN (Fig. 238), sono eguali; poichè l'uno o l'altro è sempre l'angolo formato dai due piani. ACB, OCN.

Si vede pure che nell'incontro di due archi ACB, OCN i due angoli adiacenti ACO, OCB, presi insieme, equivalgono sempre a due angoli retti.

PROPOSIZIONE IX.

524. Teorema. *Essendo dato il triangolo sferico* ABC (Fig. 227), *se dai punti* A, B, C *come poli si descrivano gli archi* EF, FD, DE *che formino il triangolo,* DEF, *reciprocamente i tre punti* D, E, F *saranno i poli dei lati* BC, AC, AB.

Imperocchè, essendo il punto A il polo dell'arco EF, la distanza AE è un quadrante; essendo il punto C il polo dell'arco DE, la distanza CE è parimente un quadrante; dunque il punto E è lontano un quadrante da ciascuno dei punti A e C; esso dunque è il polo dell'arco AC. Si dimostrerà del pari che D è il polo dell'arco BC ed F quello dell'arco AB.

Corollario. Dunque il triangolo ABC può esser descritto per mezzo di DEF, come DEF per mezzo di ABC.

PROPOSIZIONE X.

525. Teorema. *Poste le medesime cose che nel Teorema precedente* (Fig. 227), *ciascun angolo d'un dei triangoli* ABC, DEF *avrà per misura la mezza-circonferenza meno il lato opposto nell'altro triangolo.*

Sian prolungati, s'è necessario, i lati AB, AC finchè incontrino EF in G ed H: poichè il punto A è il polo dell'arco GH, l'angolo A avrà per misura l'arco GH. Ma l'arco EH è un quadrante, come pure GF, giacchè E è il polo di AH ed F è il polo di AG: dunque EH+GF equivale ad una mezza-circonferenza. Ora EH+GF è lo stesso che EF+GH; dunque l'arco GH, che

misura l'angolo A, è eguale ad una mezza-circonferenza meno il lato EF: parimente l'angolo B avrà per misura $^1/_2$c.^{a} — DF e l'angolo C avrà per misura $^1/_2$c.^{a} — DE.

Questa proprietà dev' esser reciproca fra i due triangoli, giacchè si descrivono nella stessa maniera l'uno col mezzo dell'altro. Così troveremo che gli angoli D, E, F del triangolo DEF hannu per misura respettivamente $^1/_2$c.^{a} — BC, $^1/_2$c.^{a} — AC, $^1/_2$c.^{a} — AB. Infatti l'angolo D, per esempio, ha per misura l'arco MI: ora MI+BC=MC+BI=$^1/_2$c.^{a}: dunque l'arco MI, misura dell'angolo D, =$^1/_2$c.^{a}—BC; e così degli altri.

Scolio. Bisogna osservare che oltre al triangolo DEF (Fig. 228) se ne potrebbero formare tre altri mediante l'intersezione dei tre archi DE, EF, DF. Ma la Proposizione attuale non ha luogo che pel triangolo centrale ch'è distinto dagli altri tre in ciò che i due angoli A e D son situati da una medesima parte di BC (Fig. 227); i due B ed E da una medesima parte di AC, ed i due C ed F da una medesima parte di AB.

Si danno differenti nomi ai due triangoli ABC, DEF: noi gli chiameremo *triangoli polari.*

PROPOSIZIONE XI.

526. Lemma. *Essendo dato il triangolo* ABC (Fig. 229), *se dal polo* A *e coll'intervallo* AC *si descriva l'arco di piccol circolo* DEC; *se dal polo* B *e coll'intervallo* BC *si descriva parimente l'arco* DFC; *e se dal punto* D, *ove gli archi* DEC, DFC *si taglieranno, si conducano gli archi di circolo grande* AD, DB; *dico che il triangolo* ADB *così formato avrà tutte le sue parti eguali a quelle del triangolo* ABC.

Poichè, per costruzione, il lato AD=AC, DB=BC, AB è comune; dunque questi due triangoli hanno i lati respettivamente eguali. Dico adesso che gli angoli opposti ai lati respettivamente eguali sono eguali.

Infatti, se si suppone il centro della sfera in O, si può concepire un angolo solido formato nel punto O dai tre angoli piani AOB, AOC, BOC; si può concepir parimente un secondo angolo solido formato dai tre angoli piani AOB, AOD, BOD. E poichè i lati del triangolo ABC sono eguali a quelli del triangolo ABD, ne segue che gli angoli piani, i quali formano uno di questi angoli solidi, sono respettivamente eguali agli angoli piani che forman l'altro angolo solido: ma in tal caso si è dimostrato (483) che i piani, in cui sono gli angoli eguali, son egualmente inclinati fra loro; dunque gli angoli del triangolo sferico DAB sono eguali a quelli del triangolo CAB, cioè DAB=BAC, DBA=ABC, ADB=ACB: dunque i lati e gli angoli del triangolo ADB sono eguali ai lati ed agli angoli del triangolo ACB.

Scolio. L'eguaglianza di questi triangoli non è però un' eguaglianza assoluta o di soprapposizione, perchè sarebbe impossibile d'applicarli l'uno sull'altro esattamente, salvo che non fossero isosceli. L'eguaglianza di cui si tratta è quella che abbiam già chiamata eguaglianza per *simmetria*, e in virtù di questa ragione chiameremo i triangoli ACB, ADB *triangoli simmetrici.*

PROPOSIZIONE XII.

527. Teorema. *Due triangoli situati sopra la medesima sfera o sopra sfere eguali, sono eguali in tutte le loro parti quando hanno un angolo eguale compreso fra lati respettivamente eguali.*

Sia (Fig. 230) il lato AB=EF, il lato AC=EG e l'angolo BAC=FEG; il triangolo EFG potrà essere situato sopra il triangolo ABC o sul suo simmetrico ABD, nella medesima maniera che si soprappongono due triangoli rettilinei che hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali. Dunque tutte le parti del triangolo EFG saranno eguali a quelle del triangolo ABC, vale a dire che oltre alle tre parti, che sono supposte eguali, si avrà il lato BC=FG, l'angolo ABC=EFG e l'angolo ACB=EGF.

PROPOSIZIONE XIII.

528. Teorema. *Due triangoli situati sopra la medesima sfera o sopra sfere eguali, sono eguali in tutte le loro parti quando hanno un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali.*

Poichè uno di questi triangoli può essere situato sopra l'altro o sul suo simmetrico, come si fa nel caso simile dei triangoli rettilinei (350).

PROPOSIZIONE XIV.

529. Teorema. *Se due triangoli situati sulla medesima sfera o sopra sfere eguali, sono equilateri fra loro, saranno anche equiangoli, e gli angoli eguali saranno opposti ai lati eguali.*

Ciò è manifesto per la Proposizione XI, ove si è veduto che con tre lati dati AB, AC, BC (Fig. 229) non si posson fare che due triangoli ABC, ABD differenti in quanto alla posizione delle parti, ma eguali in quanto alla grandezza di queste medesime parti. Dunque due triangoli equilateri fra loro sono o assolutamente eguali o almeno eguali per simmetria; essi in ambedue i casi sono equiangoli, e gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali.

PROPOSIZIONE XV.

530. Teorema. *In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali: e reciprocamente, se due angoli d'un triangolo sferico sono eguali, il triangolo sarà isoscele.*

La dimostrazione di questa Proposizione è identica a quella che abbiamo addotta per il triangolo isoscele rettilineo (356 357).

PROPOSIZIONE XVI.

531. Teorema. *In un triangolo sferico* ABC (Fig. 232), *se l'angolo* A *è maggiore dell'angolo* B, *il lato* BC *opposto all'angolo* A *sarà maggiore del lato* AC *opposto all'angolo* B: *reciprocamente, se il lato* BC *è maggiore di* AC, *l'angolo* A *sarà maggiore dell'angolo* B.

Vedasi la dimostrazione della Proposizione XV del Lib. I.

PROPOSIZIONE XVII.

532. Teorema. *Se i due lati* AB, AC (Fig. 233) *del triangolo sferico* ABC *sono eguali ai due lati* DE, DF *del triangolo* DEF *descritto sopra una sfera eguale; se nello stesso tempo l'angolo* A *è maggiore dell'angolo* D; *dico che il terzo lato* BC *del primo triangolo sarà maggiore del terzo* EF *del secondo.*

La dimostrazione è assolutamente simile a quella della Proposizione X del Lib. I.

PROPOSIZIONE XVIII.

533. Teorema. *Se due triangoli descritti sulla medesima sfera o sopra sfere eguali, sono equiangoli fra di loro, essi saranno pure equilateri.*

Siano A e B i due triangoli dati; P e Q i loro triangoli polari. Poichè gli angoli sono eguali nei triangoli A e B, i lati saranno eguali nei polari P e Q (525); ma dall'essere i triangoli P e Q equilateri fra loro, ne segue che sono ancora equiangoli. Finalmente dall'essere eguali gli angoli ne' triangoli P e Q, ne segue che i lati sono eguali nei loro polari A e B. Dunque i triangoli equiangoli A e B sono nel medesimo tempo equilateri fra di loro.

Si può ancor dimostrare la medesima Proposizione senza il soccorso dei triangoli polari nella maniera seguente.

Siano ABC, DEF (Fig. 234) due triangoli equiangoli fra loro, talmente che si abbia A=D, B=E, C=F; dico che avremo il lato AB=DE, AC=DF, BC=EF.

Sul prolungamento dei lati AB, AC prendete AG=DE ed AH=DF; tirate GH, e prolungate gli archi BC, GH finchè s'incontrino in I e K.

I due lati AG, AH sono per costruzione, eguali ai due DF, DE, l'angolo compreso GAH=BAC=EDF; dunque i triangoli AGH, DEF sono eguali in tutte le loro parti; dunque l'angolo AGH=DEF=ABC e l'angolo AHG=DFE=ACB.

Nei triangoli IBG, KBG il lato BG è comune, l'angolo IGB=GBK; e poichè IGB+BGK è eguale a due retti, come pure GBK+IBG, ne segue che BGK=IBG. Dunque i triangoli IBG, GBK sono eguali; dunque IG=BK ed IB=GK.

Parimente dall' essere l' angolo AHG=ACB si conchiuderà che i triangoli ICH, HCK hanno un lato eguale adiacente a due angoli eguali; dunque sono eguali; dunque IH=CK ed HK=CI.

Adesso, se dagli angoli BK, IG si tolgon gli eguali CK, HI, i resti BC, GH saranno eguali. D' altronde l' angolo BCA=AHG e l' angolo ABC=AGH; dunque i triangoli ABC, AHG hanno un lato eguale adiacente a due angoli eguali; dunque sono eguali: ma il triangolo DEF è eguale in tutte le sue parti al triangolo AHG; dunque è eguale anche al triangolo ABC, e si avrà AB=DE, AC=DF, BC=EF; dunque se due triangoli sferici sono equiangoli fra loro, i lati opposti agli angoli eguali saranno eguali.

Scolio. Questa Proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei, ove dall'eguaglianza degli angoli non si può dedurne altro che la proporzionalità dei lati. Ma è facile di render conto della differenza che si trova a questo riguardo tra i triangoli rettilinei ed i triangoli sferici. Nella Proposizione presente come pure nelle Proposizioni XII, XIII, XIV e XVII, dove si tratta del paragone dei triangoli, si dice espressamente che questi triangoli son descritti sulla medesima sfera o sopra sfere eguali. Ora gli archi simili sono proporzionali ai raggi; dunque sopra sfere eguali due triangoli non possono esser simili senza essere eguali. Non fa maraviglia dunque che l'eguaglianza degli angoli porti l'eguaglianza dei lati.

Sarebbe altrimenti se i triangoli fosser descritti sopra sfere disuguali: allora, essendo eguali gli angoli, i triangoli sarebbero simili, ed i lati omologhi sarebbero fra loro come i raggi delle sfere.

PROPOSIZIONE XIX.

534. Teorema *La somma degli angoli d'ogni triangolo sferico è minore di sei e maggiore di due angoli retti.*

Poichè 1.° ciascun angolo d'un triangolo sferico è minore di due angoli retti (*vedete lo Scolio seguente*); dunque 1.° la somma dei tre angoli è minore di sei angoli retti.

2.° La misura di ciascun angolo d'un triangolo sferico è eguale alla mezza-circonferenza meno il lato corrispondente del triangolo polare (525). Dunque la somma dei tre angoli ha per misura tre mezze-circonferenze meno la somma dei lati del triangolo polare. Ora questa ultima somma è minore di una circonferenza (519); dunque togliendola da tre mezze-circonferenze, il resto maggiore di una mezza circonferenza; che è la misura di due angoli retti; dunque 2.° la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è maggiore di due angoli retti.

Corollario. I. La somma degli angoli di un triangolo sferico non è costante come quella dei triangoli rettilinei; essa varia da due angoli retti fino a sei, senza poter esser eguale nè all'uno, nè all'altro limite. Quindi è che due angoli dati non fan conoscere il terzo.

II. Un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti, due o tre angoli ottusi.

Se il triangolo ABC (Fig. 235) è *bi-rettongolo*, cioè se ha due angoli retti B e C, il vertice A sarà il polo della base BC, ed i lati AB, AC saranno quadranti.

Se inoltre l'angolo A è retto, il triangolo ABC sarà *tri-rettangolo*, i suoi angoli saranno tutti retti ed i suoi lati quadranti. Il triangolo *tri-rettangolo* è contenuto otto volte nella superficie della sfera; ciò si vede per mezzo della Fig. 236, supponendo l'arco MN eguale a un quadrante.

Scolio. Abbiamo supposto in tutto ciò che precede, e conformemente alla Definizione VI che i triangoli sferici hanno i loro lati sempre minori della mezza-circonferenza; allora ne segue che gli angoli son sempre minori di due angoli retti; perchè, se il lato AB (Fig. 224) è minore della mezza-circonferenza come pure AC, questi archi deggiono essere prolungati ambedue per incontrarsi in D. Ora i due angoli ABC, CBD presi insieme equivalgono a due angoli retti; dunque l'angolo ABC solo è minore di due angoli retti.

Osserveremo però ch'esistono dei triangoli sferici di cui certi lati son maggiori della mezza circonferenza, e certi angoli maggiori di due angoli retti. Perchè, se si prolunga il lato AC in una circonferenza intera ACE, ciò che resta togliendo dalla mezza-sfera il triangolo ABC, è un nuovo triangolo che si può anch'esso indicare con ABC, e i di cui lati sono AB, BC, AEDC. Si vede dunque che il lato AEDC è maggiore della mezza-circonferenza AED, ma nel medesimo tempo l'angolo opposto in B supera due angoli retti di quanto è l'angolo CBD.

Del resto si sono esclusi dalla Definizione i triangoli i cui lati ed angoli sono sì grandi, perchè la loro risoluzione, o la determinazione delle lor parti, si riduce sempre a quella dei triangoli compresi nella Definizione suddetta: Infatti si vede facilmente che, se si conoscono gli angoli e i lati del triangolo ABC, si conosceranno immediatamente gli angoli e i lati del triangolo del medesimo nome ch'è il resto della mezza-sfera.

PROPOSIZIONE XX.

535. Teorema. *Il fuso* AMBNA (Fig. 236) *sta alla superficie della sfera come l'angolo* MAN *di questo fuso sta a quattro angoli retti, o come l'arco* MN, *che misura quell'angolo, sta all'intera circonferenza.*

*Supponiamo primieramente che l'arco MN stia alla circonferenza MNPQ in un rapporto razionale, per esempio, come m sta ad n. Si dividerà la circonferenza MNPQ in n parti eguali, di cui MN ne conterrà m; congiungendo dipoi il polo A ed i punti di divisione con altrettanti quarti di circonferenza, si avranno n triangoli nella mezza-sfera AMNPQ, che saranno tutti eguali fra loro, poichè avranno tutte le loro parti eguali. La sfera intera conterrà dunque $2n$ di questi triangoli parziali, ed il fuso AMBNA ne conterrà $2m$; dun-

que il fuso sta alla superficie della sfera come $2m$ sta a $2n$ o come m sta ad n, cioè, come l'arco MN sta alla circonferenza.

Se l'arco MN non è commensurabile colla circonferenza, si proverà collo stesso ragionamento, di cui si son già veduti molti esempj, che la superficie del fuso sta sempre a quella della sfera come l'arco MN sta alla circonferenza.

Corollario I. Due fusi stanno fra loro come i loro angoli respettivi.

II. Si è già veduto che la superficie intera della sfera è eguale a otto triangoli tri-rettangoli (534); dunque, se si prende per unità l'area d'uno di questi triangoli, la superficie della sfera sarà rappresentata da 8. Posto ciò, la superficie del fuso, il cui angolo è A, sarà espressa da 2A (se però l'angolo A è valutato nella supposizione che l'angolo retto sia eguale all'unità); poichè si ha $2A : 8 : : A : 4$. Vi sono qui dunque due unità differenti, l'una per gli angoli, ch'è l'angolo retto, l'altra per la superficie, ch'è il triangolo sferico tri-rettangolo, ossia quello di cui tutti gli angoli sono retti e i lati son quarte parti di circonferenza.

Scolio. L'unghia sferica compresa fra i piani AMB, ANB sta al solido intero della sfera come l'angolo A sta a quattro angoli retti. Poichè, essendo eguali i fusi, le unghie sferiche saranno parimente eguali: dunque due unghie sferiche stanno fra loro come gli anguli formati dai piani che la comprendono.

PROPOSIZIONE XXI.

536. Teorema. *Due triangoli sferici simmetrici sono eguali in superficie.*

Siano ABC, DEF (Fig. 237) due triangoli simmetrici, vale a dire due triangoli che hanno i lati eguali, cioè AB=DE, AC=DF, BC=EF, e che tuttavia non possono essere soprapposti; dico che la superficie ABC è eguale alla superficie DEF.

Sia P il polo del piccol circolo che passerebbe per i tre punti A, B, C; da questo punto siano condotti gli archi eguali (521) PA, PB, PC; al punto F fate l'angolo DFQ=ACP, l'arco FQ=CP, e tirate DQ, EQ.

I lati DF, FQ sono eguali ai lati AC, CP; l'angolo DFQ=ACP; dunque i due triangoli DFQ, ACP sono eguali in tutte le loro parti (527); dunque il lato DQ=AP e l'angolo DQF=APC.

Nei triangoli proposti DFE, ABC gli angoli DFE, ACB opposti ai lati eguali DE, AB essendo eguali (526), se si tolgono gli angoli DFQ, ACP, eguali per costruzione, resterà l'angolo QFE eguale a PCB. D'altronde i lati QF, FE sono eguali ai lati PC, CB: dunque i due triangoli FQE, CPB sono eguali in tutte le loro parti; dunque il lato QE=PB e l'angolo FQE=CPB.

Se si osserva adesso che i triangoli DFQ, APC che hanno i lati respettivamente eguali, sono nel medesimo tempo isosceli, si vedrà che possono essere soprapposti l'uno all'altro; perchè, avendo situato PA sopra il suo eguale QF, il lato PC cadrà sopra il suo eguale QD, e così i due triangoli si confonderanno in un solo; dunque sono eguali; dunque la superficie DQF=APC. Per una simil ragione, la superficie FQE=CPB e la superficie DQE=APB; dun-

que si ha DQF+FQE—DQE=APC+CPB—APB, ovvero DFE=ABC; dunque i due triangoli simmetrici ABC, DEF sono eguali in superficie.

Scolio. I poli P e Q potrebbero essere situati al di dentro dei triangoli ABC, DEF, allora bisognerebbe riunire i tre triangoli DQF, FQE, DQE affin di comporre il triangolo DEF; e similmente bisognerebbe riunire i tre triangoli APC, CPB, APB per comporne il triangolo ABC; d'altronde la dimostrazione e la conclusione sarebbero sempre le stesse.

PROPOSIZIONE XXII.

537. Teorema. *Se due circoli grandi* AOB, COD (Fig 238) *si tagliano come si voglia nell'emisfero* AOCBD, *la somma dei triangoli opposti* AOC, BOD *sarà eguale al fuso il cui angolo è* BOD.

Poichè, prolungando gli archi OB, OD nell'altro emisfero finchè s'incontrino in N, OBN sarà una mezza-circonferenza, come pure AOB; togliendo da ambe le parti OB, si avrà BN=AO. Per una simil ragione si ha DN=CO e BD=AC; dunque i due triangoli AOC, BDN hanno i tre lati respettivamente eguali; d'altronde la loro posizione è tale ch'essi son simmetrici l'uno dell'altro; dunque sono eguali in superficie, e la somma dei triangoli AOC, BOD è equivalente al fuso OBNDO il cui angolo è BOD.

Scolio. È chiaro pure che le due piramidi sferiche, che hanno per basi i triangoli AOC, BOD, prese insieme equivalgono all'unghia sferica di cui l'angolo è BOD.

PROPOSIZIONE XXIII.

538. Teorema. *La superficie d'un triangolo sferico qualunque ha per misura l'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.*

Sia ABC (Fig. 239) il triangolo proposto; prolungate i suoi lati finchè incontrino il gran circolo DEFG condotto a piacere fuor del triangolo. In virtù del Teorema precedente, i due triangoli ADE, AGH presi insieme equivalgono al fuso il cui angolo è A, e che ha per misura 2A (535); laonde si avrà ADE+AGH=2A; per una simil ragione, BGF+BID=2B, CIH+CFE =2C. Ma la somma di questi sei triangoli supera la superficie della mezza-sfera di due volte quella del triangolo ABC; d'altronde la mezza-sfera è rappresentata da 4; dunque il doppio del triangolo ABC è eguale a 2A+2B+2C—4, e per conseguenza ABC=A+B+C—2: dunque ogni triangolo sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti.

Corollario I. Quanti angoli retti vi saranno in tal misura, altrettanti triangoli tri-rettangoli od ottave parti di sfera, ciascuna delle quali è l'unità di superficie, saranno contenute nel triangolo proposto. Per esempio, se gli angoli son tutti eguali a $\frac{4}{3}$ d'un angolo retto, allora i tre angoli insieme varranno 4 angoli retti, ed il triangolo proposto sarà rappresentato da 4—2, ovvero 2; dunque sarà eguale a due triangoli tri-rettangoli, o al quarto della superficie di tutta la sfera.

II. Il triangolo sferico ABC è quivalente al fuso, il cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}-1$; parimente la piramide sferica, la cui base è ABC, equivale all'unghia sferica, il cui angolo è $\frac{A+B+C}{2}-1$.

Scolio. Nello stesso tempo che si paragona il triangolo sferico ABC al triangolo tri-rettangolo, la piramide sferica che ha per base ABC, si paragona colla piramide tri-rettangola, e ne resulta la medesima proporzione. L'angolo solido al vertice della piramide si paragona parimente coll'angolo solido al vertice della piramide tri-rettangola: infatti il paragone si stabilisce mediante la coincidenza delle parti. Ora, se le basi delle piramidi coincidono, è chiaro che le piramidi stesse coincideranno, come pure gli angoli solidi al loro vertice. Da ciò resultano più conseguenze.

1.ª Due piramidi triangolari sferiche stanno fra loro come le loro basi; e poichè una piramide poligona può dividersi in più piramidi triangolari, ne segue che due piramidi sferiche qualunque stanno fra loro come i poligoni che servono a loro di basi.

2.ª Gli angoli solidi al vertice delle medesime piramidi stanno egualmente nella proporzione delle basi; dunque, per paragonare due angoli solidi qualunque, bisogna situare i loro vertici al centro di due sfere eguali, e questi angoli solidi staranno fra loro come le superficie dei poligoni sferici intercetti fra i loro piani o facce.

L'angolo al vertice della piramide tri-rettangola è formato da tre piani perpendicolari fra loro: quest'angolo, che si può chiamare *angolo solido retto*, è adattatissimo per servire d'unità di misura agli altri angoli solidi. Posto ciò, il medesimo numero che dà la superficie d'un poligono sferico, darà la misura dell'angolo solido corrispondente. Per esempio, se la superficie d'un poligono sferico è $^3/_4$, vale a dire, se è i $^3/_4$ del triangolo tri-rettangolo, l'angolo solido corrispondente sarà pure i $^3/_4$ dell'angolo solido retto.

PROPOSIZIONE XXIV.

539. Teorema. *La superficie d'un poligono sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno il prodotto di due angoli retti pel numero dei lati del poligono meno due.*

Da un medesimo vertice A (Fig. 240) siano condotte a tutti gli altri vertici le diagonali AC, AD; il poligono ABCDE sarà diviso in tanti triangoli quanti sono i suoi lati meno due. Ma la superficie di ciascun triangolo ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti; ed è chiaro che la somma di tutti gli angoli dei triangoli è eguale alla somma di tutti gli angoli del poligono; dunque la superficie del poligono è eguale alla somma dei suoi angoli diminuita di tante volte due angoli retti quanti sono i suoi lati meno due.

Scolio. Sia s la somma degli angoli d'un poligono sferico, n il numero

dei suoi lati; essendo supposto l'angolo retto per unità, la superficie del poligono avrà per misura $s-2$ $(n-2)$, ovvero $s-2n+4$.

(*) PROPOSIZIONE XXV.

540. Teorema. *Sia* S *il numero degli angoli solidi d'un poliedro,* H *il numero delle sue facce;* A *il numero delle sue costole; dico che avremo sempre* S+H=A+2.

Prendete al di dentro del poliedro un punto da cui condurrete delle linee rette ai vertici di tutti i suoi angoli; immaginate dipoi che dal medesimo punto, come centro, si descriva una superficie sferica che sia incontrata da tutte queste linee in altrettanti punti; congiungete questi punti con archi di circoli grandi, in modo che si formino sulla superficie della sfera dei poligoni corrispondenti ed eguali in numero alle facce del poliedro. Sia ABCDE (Fig: 240) uno di questi poligoni, e sia n il numero dei suoi lati; la sua superficie sarà $s-2n+4$, essendo s la somma degli angoli A, B, C, D, E. Se si valuti similmente la superficie di ciascuno degli altri poligoni sferici e si sommino tutte insieme, se ne conchiuderà che la lor somma, o la superficie della sfera, rappresentata da 8, è eguale alla somma di tutti gli angoli dei poligoni meno due volte il numero dei loro lati, più 4 preso tante volte quante sono le facce del poliedro. Ora, siccome tutti gli angoli che si formano intorno ad un medesimo punto A, equivalgono a quattro angoli retti, la somma di tutti gli angoli dei poligoni è eguale a 4 preso tante volte quanti angoli solidi vi sono; essa è dunque eguale a 4S. Di più il doppio del numero dei lati AB, BC, CD ec. è eguale al quadruplo del numero delle costole, ossia eguale a 4A, giacchè la medesima costola serve di lato a due facce; dunque si avrà 8=4S—4A+4H, ovvero prendendo il quarto di ciascun membro, 2=S—A+H; dunque S+H=A+2.

Corollario. Segue da ciò che *la somma degli angoli piani che formono gli angoli solidi d'un poliedro, è eguale a tante volte quattro angoli retti quante unità vi sono in* S—2, *essendo* S *il numero degli angoli solidi del poliedro.*

Poichè, se si considera una faccia, il cui numero di lati sia n la somma degli angoli di questa faccia sarà $2n-4$ angoli retti (372). Ma la somma di tutti i $2n$ o il doppio del numero dei lati di tutte le facce, è eguale a 4A, e 4 preso tante volte quante sono le facce è eguale a 4H; dunque la somma degli angoli di tutte le facce è eguale a 4A—4H. Ora, pel Teorema che abbiam già dimostrato, si ha A—H=S—2, e per conseguenza 4A—4H=4(S—2). Dunque *la somma degli angoli piani* ec.

(*) PROPOSIZIONE XXVI.

541. Teorema. *Di tutti i triangoli sferici* (Fig. 241 *a* e 241 *b*) *formati con due lati dati* CB, CA *ed un terzo a piacimento, il più grande* ABC *è quello nel quale l'angolo* C, *compreso fra i lati dati, è eguale alla somma degli altri due angoli* A *e* B *rimanenti.*

Prolungate i due lati AC, AB fino al loro incontro in D; avrete un triangolo sferico BCD, nel quale l'angolo DBC sarà parimente eguale alla somma degli altri due angoli BDC, BCD; perchè BCD+BCA essendo eguale a due angoli retti come pure CBA+CBD, si ha BCD+BCA=CBA+CBD; aggiungendo da ambe le parti BDC=BAC, si avrà BCD+BCA+BDC=CBA+CBD+BAC. Ora per ipotesi, BCA=CBA+BAC dunque CBD=BCD+BDC.

Conducete BI che faccia l'angolo CBI=BCD, e per conseguenza IBD=BDC; i due triangoli IBC, IBD saranno isosceli, e si avrà IC=IB=ID; dunque il punto I, mezzo di DC, è ad egual distanza dai tre punti B, C, D: per una simil ragione, il punto O, mezzo di AB, sarà egualmente distante dai tre punti A, B, C.

Sia ora (Fig. 241 *b*) CA'=CA e l'angolo BCA'>BCA; se si tiri A'B, e si prolunghino gli archi A'C, A'B fino al loro incontro in D', l'arco D'CA' sarà una mezza-circonferenza, come pure DCA: dunque, poichè si ha CA'=CA, si avrà ancora CD'=CD. Ma nel triangolo CID' si ha CI+ID'>CD'; dunque ID'>CD'—CI, ovvero ID'>ID.

Nel triangolo isoscele CIB dividiamo l'angolo del vertice I in due parti eguali con l'arco EIF che sarà perpendicolare sopra il mezzo di BC. Se si prende un punto L tra I ed E, la distanza BL, eguale a LC, sarà minor di BI, perchè evidentemente si ha BL+LC<BI+IC; dunque, prendendo la metà da ambe le parti, si avrà BL<BI. Ma nel triangolo D'LC si ha D'L>D'C—CL, ed a più forte ragione D'L>DC—CI, ossia D'L>DI o D'L>BI; dunque D'L>BL. Dunque, se si cerca sopra l'arco EIF un punto egualmente distante dai tre punti B, C, D', questo punto non potrebbe trovarsi che sul prolungamento di EI verso F. Sia I' il punto cercato, di modo che s'abbia D'I'=BI'=CI'; i triangoli I'CB, I'CD', I'BD' essendo isosceli, avremo gli angoli eguali I'BC=I'CB, I'BD'=I'D'B, I'CD'=I'D'C. Ma gli angoli D'BC+CBA' equivalgono a due angoli retti, come ancora D'CB+BCA: dunque

$$D'BI'+I'BC+CBA'=2.$$

$$BCI'-I'CD'+BCA'=2.$$

Aggiungendo le due somme e osservando che si ha I'BC=BCI' e D'BI'—I'CD'=BD'I'—I'D'C=CD'B=CA'B, si avrà

$$2I'BC+CA'B+CBA'+BCA'=4.$$

Dunque CA'B+CBA'+BCA'—2 (misura dell'area del triangolo A'BC) =2—2I'BC, di modo che si ha *area* A'BC=2—2 *angolo* I'BC; similmente nel triangolo ABC si avrebbe ABC=2—2 *angolo* IBC. Ora si è dimostrato che l'angolo I'BC è maggiore di IBC; dunque l'area A'BC è minore di ABC.

La medesima dimostrazione e la medesima conclusione avrebbero luogo se (Fig. 241 *a*), prendendo sempre l'arco CA'=CA, si facesse l'angolo BCA'<BCA; dunque ABC è il triangolo il più grande tra tutti quelli che hanno due lati dati ed il terzo a piacere.

(*) PROPOSIZIONE XXVII.

542 Teorema. *Di tutti i triangoli sferici, formati con un lato dato ed un perimetro dato, il più grande è quello in cui i due lati non determinati sono eguali.*

Sia AB (Fig. 242) il lato dato comune ai due triangoli ACB, ADB e sia AC+CB=AD+DB; dico che il triangolo isoscele ACB, nel quale AC=CB, è maggiore del non-isoscele ADB.

Poichè, avendo questi triangoli la parte comune AOB, basta di far vedere che il triangolo BOD è minore di AOC. L'angolo CBA, eguale a CAB, è maggiore di OAB; onde il lato AO è maggiore di OB (531); prendete OI=OB; fate OK=OD e tirate KI: il triangolo OKI sarà eguale a DOB (536). Se si nega adesso che il triangolo DOB, o il suo eguale KOI, sia minore di OAC: bisognerà che sia eguale o maggiore; in ambedue i casi, siccome il punto I è fra i punti A ed O, bisognerà che il punto K sia sopra OC prolungato, senza di che il triangolo OKI sarebbe contenuto nel triangolo CAO, e perciò sarebbe minore. Posto ciò, essendo CA il più corto viaggio da C ad A, si ha CK+KI+IA>CA. Ma CK=OD—CO, AI=AO—OB, KI=BD; dunque OD—CO+AO—OB+BD>CA, e, riducendo, AD—CB+BD>CA o AD+BD>AC+CB. Ora questa disuguaglianza è contraria alla supposizione di AD+BD=AC+CB; dunque il punto K non può cadere sul prolungamento di OC; dunque cade fra O e C, e per conseguenza il triangolo KOI o il suo eguale ODB è minore di ACO: dunque il triangolo isoscele ACB è maggiore del non isoscele ADB della medesima base e dello stesso perimetro.

Scolio. Queste due ultime Proposizioni sono analoghe alle Proposizioni. I e III dell'Appendice al Libro IV; laonde si posson dedurre per rapporto ai poligoni sferici le conseguenze o Corollarj che han luogo per i poligoni rettilinei.

APPENDICE AI LIBRI SESTO E SETTIMO.

I POLIEDRI REGOLARI.

(*) PROPOSIZIONE I.

543. Teorema. *Non posson esservi che cinque poliedri regolari.*

Poichè si son definiti per *poliedri regolari* quelli di cui tutte le facce sono poligoni regolari eguali, e di cui tutti gli angoli solidi sono eguali fra loro.

Queste condizioni non possono aver luogo se non che in un piccol numero di casi.

1.° Se le facce son dei triangoli equilateri, si può formar ciascun angolo solido del poliedro con tre angoli di questi triangoli o con quattro o con cinque: quindi nascono tre corpi regolari che sono il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro. Non se ne può formare un maggior numero con dei triangoli equilateri, poichè sei angoli di questi triangoli equivalgono a quattro angoli retti, e non posson formare un angolo solido.

2.° Se le facce son dei quadrati, si posson riunire i loro angoli a tre a tre; e da ciò ne risulta l'essaedro o cubo. Quattro angoli di quadrato equivalgono a quattro angoli retti, e non posson formare un angolo solido.

3.° Finalmente, se le facce sono dei pentagoni regolari, si potran pure riunire i loro angoli a tre a tre, e ne risulterà il dodecaedro regolare. Non si può andare più oltre; poichè tre angoli d'esagono regolare equivalgono a quattro angoli retti e tre angoli d'ettagono equivalgono a più di quattro retti.

Dunque non si possono avere che cinque poliedri regolari; tre formati con dei triangoli equilateri, uno con dei quadrati ed uno con dei pentagoni.

Scolio. Si proverà nella Proposizione seguente che questi cinque poliedri esiston realmente, e che se ne posson determinare tutte le dimensioni quando si conosca una delle lor facce.

(*) PROPOSIZIONE II.

544. Problema. *Essendo data una delle facce d' un poliedro regolare o soltanto il suo lato, costruire il poliedro.*

Questo Problema ne presenta cinque che noi risolveremo successivamente.

Costruzione del tetraedro. Sia ABC (Fig. 243) il triangolo equilatero che debb'essere una delle facce del tetraedro: dal punto O, centro di questo triangolo, inalzate OS perpendicolare al piano ABC; terminate questa perpendicolare al punto S talmente che AS=AB; tirate SB, SC; e la piramide SABC sarà il tetraedro richiesto.

Poichè, a cagione delle distanze eguali OA, OB, OC, le oblique SA, SB, SC si allontanano egualmente dalla perpendicolare SO, e perciò sono eguali. Una di esse SA=AB; dunque le quattro facce della piramide SABC sono triangoli eguali al triangolo dato ABC. D'altronde gli angoli solidi di questa piramide sono eguali fra loro, poichè ciascuno di essi è formato con tre angoli piani eguali; dunque questa piramide è un tetraedro regolare.

Costruzione dell'essaedro. Sia ABCD (Fig. 244) un quadrato dato: sopra la base ABCD costruite un prisma retto la cui altezza AE sia eguale al lato AB. È chiaro che le facce di questo prisma sono quadrati eguali, e che i suoi angoli solidi sono eguali fra loro, giacchè vengon tutti formati da tre angoli retti; dunque questo prisma è un essaedro regolare o cubo.

Costruzione dell'ottaedro. Sia AMB (Fig. 245) un triangolo equilatero dato: sul lato AB descrivete il quadrato ABCD; dal punto O, centro di questo

quadrato, alzate sul suo piano la perpendicolare TS, terminata dalle due parti in T e in S talmente che OT=OS=AO; tirate dipoi SA, SB, TA ec.: avrete un solido SABCDT composto di due piramidi quadrangolari SABCD, TABCD addossate per la loro base comune ABCD: questo solido sarà l'ottaero regolare cercato.

Infatti il triangolo AOS è rettangolo in O, come pure il triangolo AOD; i lati AO, OS, OD sono eguali; dunque questi triangoli sono eguali; dunque AS=AD. Si dimostrerà parimente che tutti gli altri triangoli rettangoli AOT, BOS, COT ec. sono eguali al triangolo AOD; dunque tutti i lati AB, AS, AT ec. sono eguali fra loro e per conseguenza il solido SABCDT è compreso da otto triangoli eguali al triangolo equilatero dato ABM. Dico di più che gli angoli solidi del poliedro sono eguali fra loro, per esempio, l'angolo S è eguale all'angolo B.

Poichè è manifesto che il triangolo SAC è eguale al triangolo DAC e che perciò l'angolo ASC è retto, dunque la Figura SATC è un quadrato eguale al quadrato ABCD. Ma, se si paragona la piramide BASCT colla piramide SABCD, la base ASCT della prima può situarsi sulla base ABCD della seconda, allora essendo il punto O un centro comune, l'altezza OB della prima coinciderà coll'altezza OS della seconda e le due piramidi si confonderanno in una sola: dunque l'angolo solido S è eguale all'angolo solido B; dunque il solido SABCDT è un ottaedro regolare.

Scolio. Se tre rette eguali AC, BD, ST sono perpendicolari fra loro e si tagliano nel loro mezzo, le estremità di queste rette saranno i vertici d'un ottaedro regolare.

Costruzione del dodecaedro. Sia ABCDE (Fig. 246) un pentagono regolare dato; siano ABP, CBP due angoli piani eguali all'angolo ABC; con questi angoli piani formate l'angolo solido B e determinate per la Proposizione XXIV del libro V l'inclinazione scambievole di due di questi piani: inclinazione ch'io chiamo K. Formate similmente nei punti C, D, E, A degli angoli solidi eguali all'angolo solido B e situati nella stessa maniera: il piano CBP sarà lo stesso che il piano BCG, poichè sono inclinati l'uno e l'altro della medesima quantità K sul piano ABCDE. Si può dunque nel piano PBCG descrivere il pentagono BCGFP eguale al pentagono ABCDE. Se si fa lo stesso in ciascuno degli altri piani CDI, DEL ec., si avrà una superficie convessa PFGH ec. composta di sei pentagoni regolari eguali, ed inclinati ciascuno sul suo adiacente della quantità medesima K. Sia *pfgh* ec. una seconda soperficie eguale a PFGH ec; dico che queste due superficie possono esser riunite in tal modo da non formare che una sola superficie convessa continuata. Infatti l'angolo *opf*, per esempio, può unirsi ai due angoli OPB, BPF per fare un angolo solido P eguale all'angolo B: ed in questa riunione non si cambierà niente l'inclinazione dei piani BPF, BPO, giacchè questa inclinazione è tale quale appunto bisogna per la formazione dell'angolo solido. Ma, nel tempo stesso che si forma l'angolo solido P, il lato *pf* si applicherà sul suo eguale PF, e nel punto F si troveranno riuniti tre angoli piani PFG, *pfe*, *efg* che formeranno

un angolo solido eguale a ciascuno degli angoli già formati: questa riunione farassi senza cambiar niente lo stato dell'angolo P, nè quello della superficie *efgh* ec., poichè i piani PFG, *efp* di già riuniti in P hanno fra loro l'inclinazione convenevole K, come pure i piani *efg*, *efp*. Continuando così di mano in mano si vede chiaro che le due superficie si adatteranno scambievolmente l'una coll'altra, per non formare che una sola superficie continuata e rientrante in sè stessa: questa superficie sarà quella d'un dodecaedro regolare, poichè è composta di dodici pentagoni regolari eguali e tutti i suoi angoli solidi sono eguali fra loro.

Costruzione dell'icosaedro. Sia ABC (Fig. 247) una delle sue facce; bisogna prima formare un angolo solido con cinque piani eguali al piano ABC ed egualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente. Perciò sul lato B'C' eguale a BC fate il pentagono regolare B'C'H'I'D'; dal centro di questo pentagono alzate sul suo piano una perpendicolare che terminerete in A' di modo che B'A'=B'C'; tirate A'C', A'H', A'I', A'D'; e l'angolo solido A' formato dai cinque piani B'A'C', C'A'H' ec. sarà l'angolo solido domandato. Poichè le oblique A'B', A'C' ec. sono eguali, una di esse A'B' è eguale al lato B'C'; dunque tutti i triangoli B'A'C', C'A'H' ec. sono eguali fra loro ed al triangolo dato ABC.

È d'altronde patente che i piani B'A'C', C'A'H' ec. sono egualmente inclinati ciascono sul suo adiacente; poichè gli angoli solidi B' C' ec. sono eguali fra loro, a motivo che i medesimi son formati con due angoli di triangoli equilateri ed uno di pentagono regolare. Chiamiamo K l'inclinazione dei due piani, ove sono gli angoli eguali; inclinazione che si può determinare mediante la Proposizione XXIV del Libro V; l'angolo K sarà nel tempo stesso l'inclinazione di ciascuno dei piani che compongono l'angolo solido A', sul suo adiacente.

Posto ciò, se si fanno nei punti A, B, C gli angoli solidi, eguali ognuno all'angolo A', si avrà una superficie convessa DEFG ec. composta di dieci triangoli equilateri, di cui ciascuno sarà inclinato sul suo adiacente della quantità K, e gli angoli D, E, F ec. del suo contorno riuniranno alternativamente tre e due angoli di triangoli equilateri. Immaginate una seconda superficie eguale alla superficie DEFG ec.; queste due superficie potranno adattarsi scambievolmente, unendo ciascun angolo triplo dell'una con un angolo duplo dell'altra; e, siccome i piani di questi angoli hanno già fra loro l'inclinazione K necessaria per formare un angolo solido quintuplo eguale all'angolo A, non si cambierà punto in questa riunione lo stato di ciascuna superficie in particolare, e le due insieme formeranno una sola superficie continua composta di venti triangoli equilateri. Questa superficie sarà quella dell'icosaedro regolare, poichè d'altronde tutti gli angoli solidi sono eguali fra loro.

(*) PROPOSIZIONE III.

545. Problema. *Trovare l'inclinazione di due facce adiacenti d'un poliedro regolare.*

Questa inclinazione deducesi immediatamente dalla costruzione già data dei cinque poliedri regolari; al che bisogna aggiungere la Proposizione XXIV del Lib. V., in virtù della quale, essendo dati i tre angoli piani che formano un angolo solido, si determina l'angolo che due di questi piani fanno fra loro.

Nel tetraedro (Fig. 243). Ciascun angolo solido è formato da tre angoli di triangoli equilateri; bisogna dunque cercare, mediante il Problema citato, l'angolo che due di questi piani fanno tra loro; quest'angolo sarà l' inclinazione di due facce adiacenti del tetraedro.

Nell'essaedro (Fig. 244). L'angolo di due facce adiacenti è un angolo retto.

Nell'ottaedro. (Fig. 245). Formate un angolo solido con due angoli di triangoli equilateri ed un angolo retto; l' inclinazione dei due piani, ove sono gli angoli dei triangoli, sarà quella di due facce adiacenti dell' ottaedro.

Nel dodecaedro (Fig. 246). Ogni angolo solido è formato con tre angoli di pentagoni regolari; laonde l' inclinazione dei piani di due di questi angoli sarà quella di due facce adiacenti del dodecaedro.

Nell' icosaedro. (Fig. 247). Formate un angolo solido con due angoli di triangoli equilateri ed un angolo di pentagono regolare; l' inclinazione dei due piani, ove sono gli angoli dei triangoli, sarà quella di due facce adiacenti dell' icosaedro.

(*) PROPOSIZIONE IV.

546. Problema. *Essendo dato il lato d' un poliedro regolare, trovare il raggio della sfera iscritta e quello della sfera circoscritta ad un tal poliedro.*

Bisogna prima dimostrare che ogni poliedro regolare può essere iscritto e circoscritto a una sfera.

Sia AB (Fig. 248) il lato comune a due facce adiacenti; siano C ed E i centri di queste due facce, CD ed ED le perpendicolari abbassate da questi centri sul lato comune AB, le quali cadranno nel punto D, mezzo di questo lato. Le due perpendicolari CD, ED fanno fra loro un angolo cognito ch'è eguale all' inclinazione di due facce adiacenti, determinata dal precedente Problema. Ora, se nel piano CDE, perpendicolare ad AB, si conducono sopra CD ed ED le perpendicolari indefinite CO ed EO, che s' incontrino in O, dico che il punto O sarà il centro della sfera iscritta e quello altresì della sfera circoscritta, essendo OC il raggio della prima ed OA quello della seconda.

Infatti, poichè gli apotemi CD, DE sono eguali e l' ipotenusa DO comune, il triangolo rettangolo CDO è eguale al triangolo rettangolo ODE, e la perpendicolare OC è eguale alla perpendicolare OE. Ma essendo AB perpendicolare al piano CDE, il piano ABC è perpendicolare a CDE o CDE ad ABC: d' altronde CO nel piano CDE è perpendicolare a CD, intersezione comune dei piani CDE, ABC; dunque CO (478) è perpendicolare al piano ABC. Per la medesima ragione EO è perpendicolare al piano ABE; dunque le due perpendicolari CO, EO, condotte ai piani di due facce adiacenti dai centri di queste facce, s'incontrano in un medesimo punto O e sono eguali. Supponiamo adesso

che ABC ed ABE rappresentino due altre facce adiacenti qualunque; l'apotema CD resterà sempre della grandezza medesima, come pure l'angolo CDO, metà di CDE; dunque il triangolo rettangolo CDO ed il suo lato CO saranno eguali per rapporto a tutte le facce del poliedro; dunque, se dal punto O come centro e col raggio OC si descriva una sfera, questa toccherà tutte le facce del poliedro nei loro centri (poichè i piani ABC, ABE saranno perpendicolari all'estremità d'un raggio), e la sfera sarà iscritta nel poliedro, o il poliedro, circoscritto alla sfera.

Tirate OA, OB: a cagione di CA=CB, le due oblique OA, OB, allontanandosi egualmente dalla perpendicolare, saranno eguali: sarà lo stesso di due altre linee rette qualunque condotte dal centro O alle estremità d'un medesimo lato: dunque tutte queste linee sono eguali fra loro; dunque, se dal punto O, come centro, e col raggio OA si descriva una superficie sferica, questa superficie passerà per i vertici di tutti gli angoli solidi del poliedro, e la sfera sarà al poliedro circoscritta, o il poliedro iscritto nella medesima sfera.

Posto ciò la soluzione del Problema proposto non ha più difficoltà veruna e può effettuarsi nel modo che segue.

Essendo dato (Fig. 249) il lato d'una faccia del poliedro, descrivete questa faccia e sia CD il suo apotema. Cercate pel Problema precedente l'inclinazione di due facce adiacenti del poliedro e fate l'angolo, CDE eguale a questa inclinazione: prendete DE eguale a CD: conducete CO ed EO perpendicolari a CD ed ED; queste due perpendicolari s'incontreranno in un punto O; e CO sarà il raggio della sfera iscritta nel poliedro.

Sul prolungamento di DC prendete CA eguale al raggio del circolo circoscritto a una faccia del poliedro; ed OA sarà il raggio della sfera circoscritta a questo poliedro medesimo.

Poichè i triangoli rettangoli CDO, CAO della Figura 249 sono eguali ai triangoli dello stesso nome nella Figura 248; quindi è che mentre CD e CA sono i raggi dei circoli iscritto e circoscritto a una faccia del poliedro, OC ed OA sono i raggi delle sfere iscritta e circoscritta al medesimo poliedro.

Scolio. Si posson dedurre dalle precedenti Proposizioni diverse conseguenze.

1.° Ogni poliedro regolare può esser diviso in tante piramidi regolari, quante facce ha il poliedro: il vertice comune di queste piramidi sarà il centro del poliedro ch'è nel tempo stesso quello delle sfere iscritta e circoscritta.

2.° La solidità d'un poliedro regolare è eguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio della sfera iscritta.

3.° Due poliedri regolari del medesimo nome sono due solidi simili, e le loro dimensioni omologhe perciò sono proporzionali; dunque i raggi delle sfere iscritte o circoscritte stanno fra loro come i lati di questi poliedri.

4.° Se s'iscriva un poliedro regolare in una sfera, i piani condotti dal centro per i differenti lati divideranno la superficie della sfera in tanti poligoni sferici e simili, quante sono le facce del poliedro.

LIBRO OTTAVO.

IL CILINDRO, IL CONO E LA SFERA.

547. Definizioni. i. Si chiama *cilindro* (Fig. 250) il solido prodotto dalla rivoluzione d' un rettangolo ABCD che s' immagina rivolgersi intorno al lato immobile AB. In tal movimento i lati AD, BC, restando sempre perpendicolari ad AB, descrivono dei piani circolari eguali DHP, CGQ che si chiaman le *basi del cilindro*, ed il lato CD ne descrive la *superficie convessa*. La linea immobile AB si chiama l'*asse del cilindro*.

Ogni sezione KLM fatta nel cilindro perpendicolarmente all' asse e un circolo eguale a ciascuna dello due basi: perchè, mentre il rettangolo ABCD gira intorno ad AB, la linea IK perpendicolare ad AB descrive un piano circolare eguale alla base, e questo piano non è altro che la sezione fatta perpendicolarmente all' asse nel punto I. Ogni sezione PQGH fatta per l' asse è un rettangolo, doppio del rettangolo generatore ABCD.

ii. Si chiama *cono* (Fig. 251) il solido prodotto dalla rivolnzione del triangolo rettangolo SAB che s' immagina girare intorno al lato immobile SA. In questo movimento il lato AB descrive un piano circolare BDCE che si chiama *base del cono;* e l' ipotenusa SB ne descrive la *superficie convessa.* Il punto S si chiama il *vertice del cono*, SA l' *asse* o l' *altezza* ed SB il *lato* o *apotema*.

Ogni sezione HKFI fatta perpendicolarmente all' asse è nn circolo; ogni sezione SDE fatta per l'asse è un triangolo isoscele, doppio del triangolo generatore SAB.

iii. Se dal cono SCDB si toglie, mediante una sezione parallela alla base, il cono SFKH, il solido restante CBHF si chiama *cono-troncato* o *tronco di cono.* Si può supporre che esso sia descritto dalla rivoluzione del trapezio ABHG, i cui angoli A e G sono retti, intorno al lato AG. La linea immobile AG si chiama l' *asse* o *altezza del tronco*, i circoli BDC, HKF ne sono le *basi* e BH n'è il *lato*.

iv. Due cilindri o due coni son *simili* quando i loro assi stanno fra loro come i diametri delle lor basi.

v. Se nel circolo ACD (Fig. 252), che serve di base a un cilindro, s'iscriva un poligono ABCDE e sulla base ABCDE s' inalzi un prisma retto eguale in altezza al cilindro, il prisma si dice *iscritto nel cilindro* o il cilindro *circoscritto al prisma.* È chiaro che le costole AF, BG, CH ec. del prisma, essendo perpendicolari al pian della base, son comprese nella superficie convessa del cilindro; dunque il prisma ed il cilindro si toccano lungo queste costole.

vi. Parimente se ABCD (Fig. 253) è un poligono circoscritto alla base di

un cilindro e sulla base ABCD si costruisca un prisma retto eguale in altezza allo stesso cilindro, il prisma si chiama *circoscritto al cilindro* o il cilindro *iscritto nel prisma.*

Siano M, N ec. i punti di contatto dei lati AB, BC ec., e siano inalzate dai punti M, N ec., le perpendicolari MX, NY ec. al pian della base; è chiaro che queste perpendicolari saranno a un tempo stesso nella superficie del cilindro ed in quella del prisma circoscritto; dunque esse saranno le loro linee di contatto.

*Noi riguarderemo come evidenti queste due proposizioni: 1.ª *Ogni superficie piana come* OABCD (Fig. 254), *è minore di ogni altra superficie* PABCD *terminata col medesimo contorno* ABCD; 2.ª *Ogni superficie convessa* OABCD (Fig. 255) *è minore di ogni altra superficie qualunque che circondi la prima e che insista sul medesimo contorno* ABCD.

PROPOSIZIONE I.

548. Teorema. *La solidità d'un cilindro è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Sia CA (Fig. 258) il raggio della base del cilindro dato, A la sua altezza; rappresentiamo con c.° CA la superficie del circolo il di cui raggio è CA; dico che la solidità del cilindro sarà c.° CA×A. Poichè, se c.° CA×A non è la misura del cilindro dato, questo prodotto sarà la misura d'un cilindro maggiore o minore. E prima supponiamo che sia la misura d'un cilindro minore, per esempio del cilindro, in cui CD è il raggio della base ed A l'altezza.

Circoscrivete al circolo, il cui raggio è CD, un poligono regolare GHIP i lati del quale non incontrino la circonferenza di cui CA è il raggio: immaginate dipoi un prisma retto che abbia per base il poligono GHIP e per altezza A, il qual prisma sarà circoscritto al cilindro in cui CD è il raggio della base. Posto ciò, la solidità del prisma (500) è eguale alla sua base GHIP moltiplicata per l'altezza A; la base GHIP è minore del circolo di cui CA è il raggio; dunque la solidità del prisma è minore di c.° CA×A. Ma c.° CA×A è, per supposizione, la solidità del cilindro iscritto nel prisma; dunque il prisma sarebbe minor del cilindro: ora, al contrario, il cilindro è minore del prisma, poichè, v'è contenuto: dunque è impossibile che c.° CA×A sia la misura del cilindro in cui CD è il raggio della base ed A l'altezza, ovvero, in termini più generali, *il prodotto della base d'un cilindro per la sua altezza non può misurare un cilindro minore.*

Dico in secondo luogo che questo stesso prodotto non può misurare un cilindro maggiore: poichè, per non moltiplicar le Figure, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, s'è possibile, c.° CD×A la misura d'un cilindro maggiore, per esempio, del cilindro in cui CA è il raggio della base ed A l'altezza.

Se si fa la stessa costruzione del primo caso, il prisma circoscritto al ci-

lindro dato avrà per misura GHIP$\times$A; l'area GHIP è maggiore di c.° CD; dunque la solidità del prisma di cui si tratta, è maggiore di c.° CD$\times$A; il prisma sarebbe dunque maggior del cilindro della medesima altezza che ha per base c.° CA. Ora, all'opposto, il prisma è minor del cilindro, poichè v'è contenuto; dunque *è impossibile che la base d'un cilindro moltiplicata per la sua altezza sia la misura d'un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente la solidità d'un cilindro è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

**Scolio.* Riguardando il circolo come un poligono regolare di un numero infinito di lati infinitamente piccoli (446), il cilindro viene ad essere un prisma retto di un numero infinito di facce infinitamente sottili, e allora si vede indipendentemente dalla precedente dimostrazione, che la sua solidità deve essere eguale, come quella del prisma retto, al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario. I. I cilindri della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi e i cilindri della medesima base stanno fra loro come le altezze.

II. I cilindri simili stanno come i cubi delle altezze, o come i cubi dei diametri delle basi. Poichè le basi stanno come i quadrati dei loro diametri, e siccome i cilindri son simili, i diametri delle basi stanno come le altezze (547 IV): dunque le basi stanno come i quadrati delle altezze; dunque le basi moltiplicate per l'altezze, o i cilindri stessi, stanno come i cubi delle altezze.

III. Sia R il raggio della base d'un cilindro, A la sua altezza; la superficie della base sarà πR^2 (446) e la solidità del cilindro sarà $\pi R^2 \times A$ ovvero $\pi R^2 A$.

PROPOSIZIONE II.

549. Lemma. *La superficie convessa d'un prisma retto è eguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.*

Poichè (Fig. 252) questa superficie è eguale alla somma dei rettangoli AFGB, BGHC, CHID ec., dei quali la medesima è composta: ora le altezze AF, BG, CH ec. di questi rettangoli sono eguali all'altezza del prisma; le loro basi AB, BC, CD ec. prese insieme fanno il perimetro della base del prisma. Dunque la somma di questi rettangoli o la superficie convessa del prisma è eguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.

Corollario. Se due prismi retti hanno la medesima altezza, le superficie convesse di questi prismi staranno fra loro come i perimetri delle lor basi.

PROPOSIZIONE III.

550. Lemma. *La superficie convessa del cilindro è maggiore della superficie convessa d'ogni prisma iscritto e minore della superficie convessa d'ogni prisma circoscritto.*

Poichè (Fig. 252) la superficie convessa del cilindro e quella del prisma iscritto ABCDEF possono essere considerate come aventi la medesima lunghezza, a motivo che ogni sezione fatta nell'uno e nell'altro parallelamente ad AF è eguale ad AF; e se, per aver le larghezze di queste superficie, si tagliano con dei piani paralleli alla base o perpendicolari alla costola AF, le sezioni saranno eguali, una alla circonferenza della base, l'altra al contorno del poligono ABCDE minore di questa circonferenza: dunque, poichè a lunghezza eguale la larghezza della superficie cilindrica è maggior di quella della superficie prismatica, ne segue che la prima superficie è maggiore della seconda.

Con un ragionamento interamente simile dimostreremo, che la superficie convessa del cilindro (Fig. 253) è minore di quella d'ogni prisma circoscritto BCDKLH.

PROPOSIZIONE IV.

551. Teorema. *La superficie convessa d'un cilindro è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.*

Sia CA (Fig. 258) il raggio della base del cilindro dato, A la sua altezza; se si rappresenti con c.ª CA la circonferenza che ha per raggio CA, dico che c.ª CA$\times$A sarà la superficie convessa di questo cilindro. Poichè, se si nega questa Proposizione, bisognerà che c.ª CA$\times$A sia la superficie convessa d'un cilindro maggiore o minore; e prima suppóniamo che sia la superficie d'un cilindro minore, per esempio, del cilindro in cui CD è il raggio della base ed A l'altezza.

Circoscrivete al circolo, il cui raggio è CD, un poligono regolare GHIP i di cui lati non incontrino la circonferenza che ha CA per raggio; immaginate dipoi un prisma retto che abbia per altezza A e per base il poligono GHIP. La superficie convessa di questo prisma sarà eguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l'altezza A (549); questo contorno è minore della circonferenza, il cui raggio è CA; dunque la superficie convessa del prisma è minore di c.ª CA$\times$A. Ma c.ª CA$\times$A e, per supposizione, la superficie convessa del cilindro in cui CD è il raggio della base, il qual cilidro è iscritto nel prisma; dunque la superficie convessa del prisma sarebbe minore di quella del cilindro iscritto. Ora, al contrario, dev'esser maggiore (550); dunque la supposizione da cui siamo partiti è assurda: dunque 1.° *la circonferenza della base d'un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie convessa d'un cilindro minore.*

Si proverebbe nello stesso modo che un tal prodotto non può misurare le superficie d'un cilindro maggiore. Dunque la circonferenza della base di un cilindro, moltiplicata per la sua altezza, misura la superficie convessa di esso cilindro.

**Scolio.* Questa Proposizione è un Corollario della III. Vedete lo Scolio della Proposizione I. (548).

PROPOSIZIONE V.

552. TEOREMA. *La solidità d'un cono è eguale al prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.*

Sia SO (Fig. 259) l'altezza del cono dato, AO il raggio della base; se si rappresenta con c.° AO la superficie della base, io dico che la solidità di questo cono sarà eguale a c.° $AO \times {}^1/_3 SO$.

*Ciò può dimostrarsi provando col solito metodo che c.° $AO \times {}^1/_3 SO$ non può esprimere la solidità di un altro cono che, avendo la medesima altezza del dato, abbia una base maggiore o minore. Il ragionamento è identico a quello che abbiamo usato per il cilindro (548); se non che qui, invece di un prisma, bisogna costruire una piramide regolare che abbia la stessa altezza del cono dato.

**Scolio.* Riguardando il circolo come un poligono regolare di un numero infinito di lati, il cono non è altro che una piramide regolare, e allora dalla Propos. XIX del Lib. VI si ha immediatamente che la solidità del cono eguaglia il prodotto della sua base per un terzo della sua altezza.

Corollario I. Il cono è il terzo d'un cilindro della medesima base e della medesima altezza: da ciò segue; 1.° Che i coni d'eguali altezze stanno fra loro come le basi; 2.° Che i coni di basi eguali stanno fra loro come le altezze; 3.° Che i coni simili stanno come i cubi dei diametri delle lor basi o come i cubi delle loro altezze.

II. Sia R il raggio della base d'un cono, A la sua altezza; la solidità del cono sarà $\pi R^2 \times {}^1/_3 A$, o ${}^1/_3 \pi R^2 A$.

PROPOSIZIONE VI.

553. TEOREMA. *Il cono troncato* ADEB (Fig. 260), *in cui* OA *e* BP *sono i raggi delle basi, ha per misura* ${}^1/_3 \pi OP.(AO^2 + DP^2 + AO \times DP)$.

Sia TFGH una piamide triangolare della medesima altezza del cono SAB e la di cui base FGH sia equivalente alla base del cono. Si può supporre che queste due basi sian situate sopra un medesimo piano; allora i vertici S e T saranno a distanze eguali dal piano delle basi, ed il piano EPD prolungato farà nella piramide la sezione IKL. Ora dico che questa sezione IKL è equivalente alla base DE; poichè le basi AB, DE stanno fra loro come i quadrati dei raggi AO, DP (445) o come i quadrati delle altezze SO, SP; i triangoli FGH, IKL stanno fra loro come i quadrati di queste medesime altezze (502); dunque i circoli AB, DE stanno fra loro come i triangoli FGH, IKL. Ma per supposizione, il triangolo FGH è equivalente al circolo AB; dunque il triangolo IKL è equivalente al circolo DE.

Ora la base AB moltiplicata per ${}^1/_3 SO$ è la misura del cono SAB, e la base FGH moltiplicata per ${}^1/_3 SO$ è la misura della piramide TFGH; dunque, a motivo delle basi equivalenti, la solidità della piramide è equivalente a

quella del cono. Per una simil ragione la piramide TIKL è equivalente al cono SDE; dunque il tronco di cono ADEB è equivalente al tronco di piramide FGHIKL. Ma la base FGH, equivalente al circolo il di cui raggio è AO, ha per misura πAO^2; parimente la base $IKL = \pi DP^2$; e la media proporzionale fra πAO^2 e πDP^2 è $\pi AO \times DP$; dunque la solidità del tronco di piramide, o quella del tronco di cono, ha per misura $\frac{1}{3} OP \times (\pi AO^2 + \pi DP^2 + \pi AO \times DP)$ (507), ch'è lo stesso che $\frac{1}{3} \pi OP \times (AO^2 + DP^2 + OA \times DP)$.

PROPOSIZIONE VII.

554. Teorema. *La superficie convessa d'un cono è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.*

Sia AO (Fig. 259) il raggio della base del cono dato, S il suo vertice ed SA il suo lato; dico che la sua superficie sarà c.$^a AO \times \frac{1}{2} SA$. Poichè sia, se è possibile, c.$^a AO \times \frac{1}{2} SA$ la superficie d'un cono, che abbia per vertice il punto S, e per base il circolo descritto col raggio OB maggiore di AO.

Circoscrivete al circolo minore un poligono regolare MNPT, i cui lati non incontrino la circonferenza che ha per raggio OB; e sia SMNPT la piramide regolare che abbia per base il poligono e per vertice il punto S. Il triangolo SMN, uno di quelli che compongono la superficie convessa della piramide, ha per misura la sua base MN moltiplicata per la metà dell'altezza SA che è nel tempo stesso il lato del cono dato; quest'altezza essendo eguale in tutti gli altri triangoli SNP, SPQ ec., ne segue che la superficie convessa della piramide è eguale al contorno MNPTM moltiplicato per $\frac{1}{2}SA$. Ma il contorno MNPTM è maggiore di c.$^a AO$; dunque la superficie convessa della piramide è maggiore di c.$^a AO \times \frac{1}{2} SA$, e per conseguenza maggiore della superficie convessa del cono, che col medesimo vertice S avesse per base il circolo descritto col raggio OB. Ora, al contrario, la superficie convessa del cono è maggiore di quella della piramide; perchè, se si addossi base a base, cioè, la piramide a una piramide eguale, il cono ad un cono eguale, la superficie dei due coni circonderà da tutte le parti la superficie delle due piramidi; dunque la prima superficie sarà maggiore della seconda; dunque la superficie del cono è maggiore di quella della piramide che v'è contenuta. Il contrario sarebbe una conseguenza della nostra supposizione; dunque questa supposizione non può aver luogo; dunque 1.° la circonferenza della base d'un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato non può misurare la superficie d'un cono maggiore.

Si proverebbe nel medesimo modo che lo stesso prodotto non può misurare la superficie di un cono minore. Dunque la superficie convessa di un cono è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

Corollario. Sia L il lato d'un cono, R il raggio della sua base; la circonferenza di questa base sarà $2\pi R$, e la superficie del cono avrà per misura $2\pi R \times \frac{1}{2} L$, o πRL.

PROPOSIZIONE VIII.

555. Teorema. *La superficie convessa del tronco di cono* ADEB (Fig. 261) *è eguale al suo lato* AD *moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi* AB, DE.

Nel piano SAB, che passa per l'asse SO, conducete perpendicolarmente a SA la linea retta AF eguale alla circonferenza che ha per raggio AO; tirate SF, e conducete DH parallela ad AF.

A motivo dei triangoli simili SAO, SDC si avrà AO : DC : : SA : SD; ed a cagione dei triangoli simili SAF, SDH s'avrà AF : DH : : SA : SD; dunque AF : DH : : AO : DC, ossia : : c.ªAO : c.ªDC (445) Ma, per costruzione, AF=c.ªAO; dunque DH=c.ªDC. Posto ciò, il triangolo SAF, che ha per misura $AF \times {}^1/_2 SA$, è eguale alla superficie del cono SAB, che ha per misura $c.^a AO \times {}^1/_2 SA$. Per una simil ragione, il triangolo SDH è eguale alla superficie del cono SDE. Dunque la superficie del tronco ADEB è eguale a quella del trapezio ADHF. Quest'ultimo ha per misura $AD \times \left(\frac{AF+DH}{2}\right)$; dunque la superficie del tronco di cono ADEB è eguale al suo lato AD moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi.

Corollario. Pel punto I, in mezzo di AD, conducete IKL parallela ad AB, ed IM parallela ad AF; si dimostrerà come qui sopra, che IM=c.ªIK. Ma il trapezio $ADHF = AD \times IM = AD \times c.^a IK$; dunque si può ancora dire che *la superficie d'un tronco di cono è eguale al suo lato moltiplicato per la circonferenza d'una sezione fatta ad egual distanza dalle due basi.*

Scolio. Se una linea AD situata tutta intera da una medesima parte della linea OC e nello stesso piano, fa una rivoluzione intorno ad OC, la superficie descritta da AD avrà per misura $AD \times \left(\frac{c.^a AO + c.^a DC}{2}\right)$, ovvero $AD \times c.^a IK$, essendo le linee AO, DC, IK perpendicolari abbassate dalle estremità e dal mezzo della linea AD sopra l'asse OC.

Poichè, se si prolungano AD ed OC fino al loro incontro scambievole in S, è chiaro che la superficie descritta da AD è quella d'un cono troncato, in cui AO e DC sono i raggi delle basi, avendo il cono intero per vertice il punto S. Dunque questa superficie avrà la misura summenzionata.

Questa misura avrebbe sempre luogo quand'anche il punto D cadesse in S, il che darebbe un cono intero; ed anche quando la linea AD fosse parallela all'asse, lo che darebbe un cilindro. Nel primo caso DC sarebbe nullo; nel secondo DC sarebbe eguale ad AO e ad IK.

PROPOSIZIONE IX.

556. Lemma. *Siano* AB, BC, CD (Fig. 262) *più lati successivi d'un poligono regolare*, O *il suo centro, ed* OI *il raggio del circolo iscritto; se si suppone che la porzione di poligono* ABCD, *situata tutta intera da una me-*

desima parte del diametro FG, *faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, la superficie descritta da* ABCD *avrà per misura* MQ×c.ªOI, *essendo* MQ *l'altezza di questa superficie, o la parte dell'asse compresa fra le perpendicolari estreme* AM, DQ.

Essendo il punto I quello di mezzo di AB, ed essendo IK una perpendicolare all'asse abbassata dal punto I, la superficie descritta da AB avrà per misura AB×c.ªIK (555). Conducete AX parallela all'asse; i triangoli ABX, OIK avranno i lati respettivamente perpendicolari, cioè, OI ad AB, IK ad AX ed OK a BX; dunque questi triangoli son simili, e danno la proporzione AB:AX o MN::OI:IK, ossia ::c.ªOI:c.ªIK; dunque AB×c.ªIK=MN×c.ªOI. Donde si fa manifesto che la superficie descritta da AB è eguale alla sua altezza MN moltiplicata per la circonferenza del circolo iscritto. Parimente la superficie descritta da BC=NP×c.ªOI; la superficie descritta da CD=PQ×c.ªOI. Dunque la superficie descritta dalla porzione di poligono ABCD ha per misura (MN+NP+PQ)×c.ªOI ossia MQ×c.ªOI: essa dunque è eguale alla sua altezza moltiplicata per la circonferenza del circolo iscritto.

Corollario. Se il poligono intero è d'un numero pari di lati, e se l'asse FG passa per due vertici opposti F e G, la superficie intera descritta dalla rivoluzione del mezzo-poligono FACG sarà eguale al suo asse FG moltiplicato per la circonferenza del circolo iscritto. Quest'asse FG sarà nel tempo stesso il diametro del circolo circoscritto.

PROPOSIZIONE X.

557. Teorema. *La superficie di una zona sferica è eguale al prodotto della sua altezza moltiplicata per la circonferenza di un circolo grande.*

*Sia EF (Fig. 269) un arco, maggiore o minore di un quarto di circonferenza, che, girando intorno ad EK, descriva una zona ad un sola base, che rappresenteremo con z.ªEF; condotta FG perpendicolare ad EK, dico che si avrà z.ªEF=EG×c.ªEC.

Ciò potrebbe dimostrarsi provando col solito metodo che il prodotto EG×c.ªEC non può misurare la superficie di una zona nè maggiore, nè minore di z.ªEF. Ma se si riflette che l'arco EF non è altro che una porzione di poligono regolare, la Proposizione IX ci darà immediatamente z.ªEF=EG×c.ªEC.

Se la zona fosse a due basi come è quella descritta dall'arco FH (Fig. 220), il caso precedente ci darà z.ªDH=DQ×c.ªCD, z.ªDF=DO×c.ªCD, e quindi la zona descritta dall'arco FH, essendo la differenza di queste due zone, sarà misurata da (DQ—DO)×c.ªCD, ossia da OQ×c.ªCD.

Dunque ogni zona a una o a due basi ha per misura il prodotto della sua altezza per la circonferenza di un circolo grande.

PROPOSIZIONE XI.

558. Teorema. *La superficie della sfera è eguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza di un circolo grande.*

*Sia EFK (Fig. 269) la semicirconferenza che descrive la superficie della sfera. Condotta FG perpendicolare ad EK, la Proposizione precedente darà z.ªEF=EG×c.ªCE, z.ªFK=GK×c.ªCE. Sommando queste due equazioni ed avvertendo che la superficie della sfera si compone di quella delle due zone, avremo che (EG+GK)×c.ªCE ossia EK×c.ªCE esprime la superficie della sfera data.

**Corollario.* La circonferenza di un circolo del raggio R essendo $2R\pi$, ne segue che la superficie di una sfera il cui raggio sia R è espressa da $2R\times2R\pi$ ossia da $4R^2\pi$, e che siccome $R^2\pi$ è la superficie del circolo di raggio R, così la superficie della sfera equivale a quattro circoli grandi.

Scolio. Ottenuta la superficie della sfera, si ha anche quella del triangolo tri-rettangolo che ne è l'ottava parte; e per mezzo di questa, si ha pure quella di un fuso, di un triangolo e di un poligono sferico qualunque (538. 539).

PROPOSIZIONE XII.

559. Teorema. *Se il triangolo* BAC (Fig. 264) *ed il rettangolo* BCEF *della medesima base e della medesima altezza girano simultaneamente intorno alla base comune* BC, *il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà il terzo del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo.*

Abbassate sull'asse la perpendicolare AD: il cono descritto dal triangolo ABD è il terzo del cilindro descritto dal rettangolo AFBD (552); parimente il cono descritto dal triangolo ADC è il terzo del cilindro descritto dal rettangolo ADCE; dunque la somma dei due coni, o il solido descritto da ABC, è il terzo della somma dei due cilindri, o del cilindro descritto dal rettangolo BCEF.

Se la perpendicolare AD (Fig 265) cade al di fuori del triangolo, allora il solido descritto da ABC sarà la differenza dei coni descritti da ABD ed ACD; ma nel tempo stesso il cilindro descritto da BCEF sarà la differenza dei cilindri descritti da AFBD, AECD; dunque il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà sempre il terzo del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo della medesima base e della medesima altezza.

Corollario. Il circolo, di cui AD è il raggio, ha per superficie πAD^2; dunque $\pi AD^2\times BC$ è la misura del cilindro descritto da BCEF, e $\frac{1}{3}\pi AD^2\times BC$ è quella del solido descritto dal triangolo ABC.

PROPOSIZIONE XIII.

560. Problema. *Supponendosi che il triangolo* CAB (Fig. 266) *faccia una rivoluzione intorno alla linea* CD *condotta a piacimento fuor del triangolo dal suo vertice* C, *trovare la misura del solido così generato.*

Prolungate il lato AB finchè incontri l'asse CD in D; dai punti A e B abbassate sull'asse le perpendicolari AM, BN.

Il solido descritto dal triangolo CAD ha per misura (559) $^1/_3\pi AM^2\times CD$; il solido descritto dal triangolo CBD ha per misura $^1/_3\pi BN^2\times CD$; dunque la differenza di questi solidi, o il solido descritto da ABC, avrà per misura $^1/_3\pi(AM^2-BN^2)\times CD$.

Si può dare un'altra forma a questa espressione. Dal punto I, mezzo di AB, conducete IK perpendicolare a CD, e pel puntu B conducete BO parallela a CD; si avrà $AM+BN=2IK$ ed $AM-BN=AO$; dunque $(AM+BN)\times(AM-BN)$ o $AM^2-BN^2=2IK\times AO$ (408). La misura del solido di cui si tratta è dunque espressa ancora da $^2/_3\pi IK\times AO\times CD$. Ma, se si abbassa CP perpendicolare sopra AB, i triangoli ABO, DCP saranno simili, e daranno la proporzione AO : CP : : AB : CD, donde resulta $AO\times CD=CP\times AB$; d'altronde $CP\times AB$ è il doppiu dell'area del triangolo ABC; e però si ha $AO\times CD=2ABC$: dunque il solido descritto dal triangolo ABC ha ancur per misura $^4/_3\pi ABC\times IK$, o ciò che torna lo stesso, $ABC\times{}^2/_3c.^aIK$, (poichè $c.^aIK=2\pi IK$. *Dunque il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo* ABC *ha per misura l'area di questo triangolo moltiplicata per i due terzi della circonferenza che descrive il punto* I *mezzo della sua base.*

Corollario. Se (Fig. 267) il lato AC=CB, la linea CI sarà perpendicolare ad AB, l'area ABC sarà eguale ad $AB\times{}^1/_2CI$, e la solidità $^4/_3\pi ABC\times IK$ diventerà $^2/_3\pi AB\times IK\times CI$. Ma i triangoli ABO, CIK sono simili, e danno la proporzione AB : BO o MN : : CI : IK; dunque $AB\times IK=MN\times CI$; dunque il solido descritto dal triangolo isoscele ABC avrà per misura $^2/_3\pi MN\times CI^2$.

Scolio. La soluzione generale sembra supporre che la linea AB prolungata incontri l'asse; ma i resultamenti non sarebbero meno veri quando la linea AB fosse parallela all'asse.

Infatti il cilindro descritto da AMNB (Fig. 269) ha per misura $\pi AM^2\times MN$, il cono descritto da $ACM=^1/_3\pi AM^2\times CM$, ed il cono descritto da $BCN=^1/_3\pi AM^2\times CN$. Summandu i due primi solidi e togliendone il terzo, s'avrà pel solido descritto da ABC, $\pi AM^2\times(MN+^1/_3CN-^1/_3CN)$: e poichè $CN-CM=MN$, questa espressione si riduce a $\pi AM^2\times{}^2/_3MN$, o $^2/_3\pi CP^2\times MN$; lo che si accorda coi resultamenti di già trovati.

PROPOSIZIONE XIV.

561. Teorema. *Siano* AB, BC, CD (Fig. 262) *più lati successivi d'un poligono regolare,* O *il suo centro, ed* OI *il raggio del circolo iscritto; se*

s' immagina che il settore poligono AOD *situato da una stessa parte del diametro* FG *faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, il solido descritto avrà per misura* $^2/_3\pi OI^2 \times MQ$, *essendo* MQ *la porzione dell' asse terminata dalle perpendicolari estreme* AM, DQ.

Infatti, poichè il poligono è regolare, tutti i triangoli AOB, BOC ec. sono eguali ed isosceli. Ora, in seguito del Corollario della Proposizione precedente, il solido prodotto dal triangolo isoscele AOB ha per misura $^2/_3\pi OI^2 \times MN$; il solido descritto dal triangolo BOC ha per misura $^2/_3\pi OI^2 \times NP$; ed il solido descritto dal triangolo COD ha per misura $^2/_3\pi OI^2 \times PQ$. Dunque la somma di questi solidi, o il solido intero descritto dal settore poligono AOD, avrà per misura $^2/_3\pi OI^2 \times (MN+NP+PQ)$, o $^2/_3\pi OI_2 \times MQ$.

PROPOSIZIONE XV.

562. Teorema. *Ogni settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base, moltiplicata pel terzo del raggio, e la sfera intera ha per misura la sua superficie moltiplicata parimente pel terzo del raggio.*

*Sia ABC (Fig. 269) il settore circolare che con la sua rivoluzione intorno ad AC descriva il settore sferico. Il semicircolo ABH non essendo altro che un semipoligono regolare di un numero infinito di lati, e nel quale il raggio del circolo iscritto è CA (446), il settore ABC, che ne è una porzione, descrive un solido che, in forza del Teorema precedente, ha per misura $^2/_3\pi CA^2 \times AD$. Ma questo prodotto è lo stesso che $2\pi CA \times AD \times ^1/_3 CA$, e $2\pi CA \times AD$ è lo stesso (557) che z.^{a}AB. Dunque il solido generato da ABC, ossia il settore sferico dato, ha per misura z.^{a}AB$\times ^1/_3$CA, vale a dire la zona che gli serve di base moltiplicata per un terzo del raggio.

Si proverebbe nello stesso modo che il settore sferico generato del settore circolare CBH ha per misura z.^{a}BH$\times ^1/_3$CA

Se ora si osserva che la sfera prodotta dalla rivoluzione del semicircolo ABH intorno al diametro AH è la somma dei solidi prodotti dai settori circolari ABC, BCH, avremo che la solidità della sfera è z.^{a}AB$\times ^1/_3$CA+z.^{a}BH $\times ^1/_3$CA ossia (z.^{a}AB+z.^{a}BH)$\times ^1/_3$CA. Ma z.^{a}AB+z.^{a}BH è la superficie di tutta la sfera, dunque la solidità della sfera è eguale al prodotto della sua superficie moltiplicata per un terzo del raggio.

**Scolio.* Questa Proposizione potrà dimostrarsi, se così piace, col ragionamento per le Proposizioni I e IV.

**Corollario I.* La superficie della sfera del raggio R essendo $4R^2\pi$ (458), ne segue che la sua solidità è $4R^2\pi \times ^1/_3 R$ ovvero $^4/_3\pi R^3$. Indicando con D il diametro, si ha $R = ^1/_2 D$ e perciò $R^3 = ^1/_8 D^3$; dunque la solidità della sfera è anche espressa da $^4/_3\pi \times ^1/_8 D^3$ o meglio da $^1/_6\pi D^3$.

**II.* Essendo S, *s* due sfere, R ed r i loro raggi, le equazioni $S = ^4/_3\pi R^3$, $s = ^4/_3\pi r^3$ danno $S : s :: ^4/_3\pi R^3 : ^4/_3\pi r^3$ oppure $:: R^3 : r^3$. Dunque le sfere stanno tra loro come i cubi dei raggi.

PROPOSIZIONE XVI.

563. Teorema. *La superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto (comprendendovi le sue basi) come 2 sta a 3. Le solidità di questi due corpi stanno fra loro nel rapporto medesimo.*

Rappresentiamo con s.^{e}S la superficie e con v.^{e}S il volume della sfera descritta dal semicircolo PMQ (Fig. 270): parimente iodichiamo con s.^{e}C la superficie e con v.^{e}C il volume del cilindro generato dal semiquadrato PABQ.

Per la superficie della sfera avremo (558) s.^{e}S$=4AP^2\pi$, per la superficie convessa del cilindro, avvertendo che $PQ=AB=2AP$, avremo (550) c.$^a AP\times PQ=2AP\pi\times 2AP=4AP^2\pi$. Se alla superficie convessa del cilindro si aggiungono i due circoli, che gli servono di basi, e ognuno dei quali ha per misura $AP^2\pi$, risulterà s.^{e}C$=4AP^2\pi+2AP^2\pi$, ossia s.^{e}C$=6AP^2\pi$. Dunque abbiamo la proporzione s.^{e}S : s.^{e}C :: $4AP^2\pi : 6AP^2\pi$ ovvero :: 2 : 3 osservando che la seconda ragione si divide per $2AP^2\pi$.

Per il volume della sfera abbiamo (562) v.^{e}S$={}^4/_3\pi PA^3$ e per quello del cilindro (548) v.^{e}C$=\pi PA^2\times PQ$, ovvero, riflettendo che $PQ=2PA$, v.^{e}C$=2\pi PA^3$. Di qui risulta la proporzione v.^{e}S : v.^{e}C :: ${}^4/_3\pi PA^3 : 2\pi PA^3$ la quale facilmente (135) si riduce a v.^{e}S : v.^{e}C :: 2 : 3.

Dunque tanto le superficie, come i volumi della sfera e del cilindro circoscritto stanno tra loro nel rapporto di 2 a 3.

PROPOSIZIONE XVII.

564. Problema. *Supponendosi che il segmento circolare* BMD (Fig. 271) *faccia una rivoluzione intorno al diametro esterno a questo segmento, trovare il valore del solido generato.*

Abbassate sull'asse le perpendicolari BE, DF; dal centro C conducete CI perpendicolare sulla corda BD; e tirate i raggi CB, CD.

Il solido descritto dal settore $BCA={}^2/_3\pi CB^2\times AE$ (562): il solido descritto dal settore $DCA={}^2/_3\pi CB^2\times AF$; dunque la differenza di questi due solidi, o il solido descritto dal settore $DCB={}^2/_3\pi CB^2.(AF-AE)={}^2/_3\pi CB^2.EF$. Ma il solido descritto dal triangolo isoscele DCB ha per misura ${}^2/_3\pi CI^2.EF$ (561): dunque il solido descritto dal segmento $BMD={}^2/_3\pi EF(CB^2-CI^2)$. Ora nel triangolo rettangolo CBI si ha $CB^2-CI^2=BI^2={}^1/_4BD^2$; dunque il solido descritto dal segmento BMD avrà per misura ${}^2/_3\pi EF.{}^1/_4BD^2$. ossia ${}^1/_6\pi BD^2.EF$.

Scolio Il solido descritto dal segmento BMD sta alla sfera che ha per diametro BD, come ${}^1/_6\pi BD^2.EF$ sta a ${}^1/_6\pi BD^3$, ovvero :: EF : BD.

PROPOSIZIONE XVIII.

565. Teorema. *Ogni segmento di sfera compreso fra due piani paralleli ha per misura la semisomma delle sue basi moltiplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera di cui questa medesima altezza è il diametro.*

Siano BE, DF (Fig. 271) i raggi delle basi del segmento, EF la sua altezza, talmente che il segmento sia prodotto dalla rivoluzione dello spazio circolare BMDFE intorno all'asse FE. Il solido descritto dal segmento BMD (564) $= {}^1/_6\pi BD^2 \times EF$; il tronco di cono descritto dal trapezio BDFE (553) $= {}^1/_3\pi EF.(BE^2+DF^2+BE.DF)$; dunque il segmento di sfera, ch'è la somma di questi due solidi, $= {}^1/_6\pi EF.(2BE^2+2DF^2+2BE.DF+BD^2)$. Ma, tirando BO parallela ad EF, s'avrà $DO = DF - BE$, $DO^2 = DF^2 - 2DF.BE + BE^2$, e per conseguenza $BD^2 = BO^2 + DO^2 = EF^2 + DF^2 - 2DF \times BE + BE^2$. Ponendo questo valore in vece di BD^2 nell'espressione del segmento, e scancellando ciò che distruggesi, s'avrà per la solidità del segmento ${}^1/_6\pi EF.(3BE^2+3DF^2+EF^2)$; espressione, che si decompone in due parti; una ${}^1/_6\pi EF(3BE^2+3DF^2)$, ovvero $EF\left(\frac{\pi BE^2+\pi DF^2}{2}\right)$, è la semisomma delle basi moltiplicata per l'altezza; l'altra ${}^1/_6\pi EF^3$ rappresenta la sfera il cui diametro è EF (562). Dunque ogni segmento di sfera ec.

Corollario. Se una delle basi è nulla, il segmento di cui si tratta diviene un segmento sferico a una sola base: dunque *ogni segmento sferico a una base equivale alla metà del cilindro della medesima base e della medesima altezza, più la sfera di cui quest'altezza è il diametro.*

FINE DEL PRIMO VOLUME.

INDICE DEL TOMO PRIMO.

ELEMENTI DI ARITMETICA

ELEMENTI D'ALGEBRA.

ELEMENTI DI GEOMETRIA.

66
72
73
74
77
78
82

Digitized by Google

146
150
151
154
159
160

165
166
169
170
171
175
176
177

215
218
224
225
226
219

T.XII.